Technische Universität Berlin
Fachbereich 3 Mathematik
SS92
Martin Grötschel
Ralf Borndörfer
16. Oktober 1997

Lineare Optimierung

1. Übungsblatt

Abgabetermin: 20. April 1992 in der Übung

1. Aufgabe **10 Punkte**

Eine Nahrungsmittelfirma stellt aus Nüssen, Haferflocken und Rosinen drei Sorten Müsli (A, B, C) her. Die Mischungsverhältnisse sind wie folgt gegeben:

	A	B	C
Nüsse	2	3	1
Haferflocken	4	1	2
Rosinen	3	4	2

d. h. eine Einheit Müsli A enthält zwei Einheiten Nüsse, 4E Haferflocken und 3E Rosinen, etc. Beim Verkauf einer Einheit Müsli A erzielt die Firma einen Gewinn von 5DM, der Verkauf von B bringt 4DM, der Verkauf von C 3DM Gewinn. Die Firma kann maximal 5000E Nüsse, 11000E Haferflocken und 8000E Rosinen beschaffen.

a) Formulieren Sie das Problem, einen Produktionsplan mit maximalem Gewinn zu bestimmen, als lineares Programm.

b) Geben Sie möglichst gute untere und obere Schranken für den erzielbaren Gewinn an.

2. Aufgabe **5+5 Punkte**

a) Beschreiben Sie die folgenden Mengen mit Hilfe linearer Ungleichungen:

$$\{\, x \in \mathbb{R}^n \mid |x_i| \le 1,\, i = 1, \ldots, n \,\}$$

$$\{\, x \in \mathbb{R}^n \mid \textstyle\sum_{i=1}^n |x_i| \le 1 \,\}$$

$$\{\, x \in \mathbb{R}^n \mid ||x|| \le 1 \,\}$$

b) Schreiben Sie folgendes Problem als lineares Programm:

$$\begin{array}{ll} \text{min max} & \{\, c^T x + c_0, d^T x + d_0 \,\} \\ \text{s.t.} & Ax \le b \end{array}$$

3. Aufgabe **10 Punkte**

Ein Whisky-Importeur unterhält zwar einen unbegrenzten Markt für seine Ware, aber durch Importbeschränkungen werden seine monatlichen Einkaufsmengen folgendermaßen begrenzt:

Sir Roses	höchstens 2000 Flaschen zu 35 DM,
Highland Wind	höchstens 2500 Flaschen zu 25 DM,
Old Frenzy	höchstens 1200 Flaschen zu 20 DM.

Daraus stellt er drei Mischungen A, B und C her, die er zu 34 DM, 28.50 DM, bzw. 22.50 DM pro Flasche verkauft. Die Zusammensetzung der Mischungen ist:

A	wenigstens	60%	*Sir Roses*
	höchstens	20%	*Old Frenzy*
B	wenigstens	15%	*Sir Roses*
	höchstens	60%	*Old Frenzy*
C	höchstens	50%	*Old Frenzy*

Wie sollten die Mischungen aussehen und wieviel sollte von jeder Mischung hergestellt werden, um einen maximalen Gewinn zu erzielen? Formulieren Sie dieses Problem als lineares Programm.

4. Aufgabe **10 Punkte**

Der Spielzeugkonzern Puppele produziert zwei Typen von Puppen, die Modelle "Turamichele" und "Jim Knopf". In der Montagehalle werden für jedes Turamichele 6 Minuten, für jeden Jim Knopf 10 Minuten Maschinenzeit veranschlagt. Die Fertigstellung dauert 2 Minuten pro Turamichele, 4 Minuten pro Jim Knopf. Schließlich dauert die Qualitätskontolle 4 Minuten für jede Puppe. In der Montagehalle stehen 4 Maschinen zur Verfügung, die jeweils 45 Minuten pro Stunde in Betrieb sind. In der Fertigungshalle sind 4 Leute, mit der Qualitätskontrolle 2 Leute beschäftigt. Die Pausenzeit pro Arbeiter und pro Stunde beträgt 10 Minuten. Der Verkaufspreis für Turamichele liegt bei DM 50, ein Jim Knopf kostet DM 60. Gesucht ist diejenige Stundenproduktion, die den Profit maximiert.

a) Formulieren Sie dieses Problem als lineares Programm.

b) Lösen Sie das Problem graphisch.

c) Zeigen Sie anhand des linearen Programms, daß die Bedingung, die aus den Arbeitszeiten der Fertigungshalle resultiert, redundant ist. Wieviele Arbeiter in der Fertigungshalle würden genügen, sodaß die Optimallösung gleich bleibt?

5. Aufgabe **1+1+1+1+1+1+1 Punkte**

Beweisen oder widerlegen Sie:

a) $\text{lin}(S \cup T) = \text{lin}(S) + \text{lin}(T)$

b) $\text{lin}(S - T) = \text{lin}(S) - \text{lin}(T)$

c) $\text{cone}(S \cup T) = \text{cone}(S) + \text{cone}(T)$

d) $\text{aff}(S \cup T) = \text{aff}(S) + \text{aff}(T)$

e) $\text{aff}(S + T) = \text{aff}(S) + \text{aff}(T)$

f) $\text{conv}(S \cup T) = \text{conv}(S) + \text{conv}(T)$

g) $\text{conv}(S + T) = \text{conv}(S) + \text{conv}(T)$