

Postoptimierung bei der Planung von FTTx-Netzen

Bachelorarbeit
Technische Universität Berlin
Fachbereich Mathematik



angefertigt von Felix Simon
Matrikelnummer: 320383
betreut von Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Martin Grötschel

30. November 2011

Die selbstständige und eigenhändige Anfertigung versichert an Eides statt

Berlin, den

.....

Unterschrift

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Problembeschreibung | 5 |
| 1.1 | FTTx | 5 |
| 1.1.1 | Komponenten | 6 |
| 1.1.2 | Setupkosten | 6 |
| 1.1.3 | Bündelungseffekt | 7 |
| 1.2 | Mathematisches Modell | 8 |
| 1.2.1 | Trassennetz | 8 |
| 1.2.2 | Installationen | 10 |
| 1.2.3 | Gültiges FTTx-Netz | 11 |
| 1.2.4 | Problemstellung | 12 |
| 1.3 | Lösungsprozess von ZuPlaTo | 12 |
| 1.3.1 | Lösungsalgorithmus | 12 |
| 1.3.2 | Struktur der Lösung | 14 |
| 2 | Shiften | 17 |
| 2.1 | Was ist Shiften? | 17 |
| 2.2 | Verbesserungspotenzial des Shiftens | 18 |
| 2.2.1 | Shiften mit neuen Standorten | 20 |
| 2.2.2 | Shiften ohne neue Standorte | 22 |
| 2.3 | Shiftablegorithmus | 28 |
| 2.3.1 | Methode <code>findDPLocations()</code> | 29 |
| 2.4 | Arten der Kostenbewertung | 31 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 2.4.1 | Realkosten | 31 |
| 2.4.2 | Approximierte Kosten | 31 |
| 2.4.3 | Vergleich der Kostenvarianten | 32 |
| 2.5 | Kostenwertberechnung | 34 |
| 2.5.1 | Kabel und Rohrbewertung Variante I | 34 |
| 2.5.2 | Kabel und Rohrbewertung Variante II | 35 |
| 2.5.3 | Vergleich der Kostenwertvarianten | 36 |
| 3 | Kreisentfernung | 39 |
| 3.1 | Was sind Kreise? | 39 |
| 3.2 | Verbesserungspotenzial der Kreisentfernung | 42 |
| 3.2.1 | Potenzial der Kundennetzwerkkreise | 42 |
| 3.2.2 | Potenzial der DP-CO-Kreise | 43 |
| 3.3 | Kreisentfernungsalgorithmus | 45 |
| 3.3.1 | Die Methode <code>deleteSubnetworkCycle()</code> | 46 |
| 3.3.2 | Methode <code>deleteDPCOCycle()</code> | 48 |
| 4 | Ergebnisse | 51 |
| 4.1 | Berechnungen | 51 |
| 4.2 | Zusammenfassung und Ausblick | 55 |

Danksagung

Ein besonderer Dank gilt meinem Betreuer und Vorgesetzten Dr. Axel Werner, der sich immer viel Zeit für mich und meine Arbeit nahm und stets wertvolle Anregungen zu geben wusste. Dabei fanden die Besprechungen ausnahmslos in lockerer und entspannter Atmosphäre statt, in der mir viel Geduld und Interesse entgegen gebracht wurde. Außerdem danke ich für die Bereitschaft, trotz einiger Widerstände als Zweitgutachter zu fungieren.

Weiterhin danke ich Prof. Dr. Martin Grötschel für die Betreuung und Begutachtung der Arbeit.

Ebenfalls danke ich den hilfsbereiten und engagierten Korrekturlesern Marian und Stefan.

Abschließend möchte ich meiner Freundin Mary danken, die mich stets motiviert und beraten hat.

Einleitung

In den letzten Jahren erlebte das Internet einen enormen, immer schneller werdenden Aufschwung. Dies hat zu einer stark steigenden Zahl an Gesamtnutzern, aber auch einen steigenden Bedarf des Einzelnen an Datenraten zur Folge. Um diesem wachsenden Bedarf der Bevölkerung gerecht zu werden, wird neben dem allgemeinen Infrastrukturausbau im Telekommunikationsbereich auch die Verwendung neuer Technik vorangetrieben. Exemplarisch dafür ist die steigende Verwendung von Glasfasern im Bereich der Zugangsnetze. Dieses moderne Telekommunikationskabel, welches auf optischer Datenübertragung basiert und im weiteren Verlauf oft nur Faser genannt wird, bietet im Vergleich zu davor verwendeten Kupferkabeln, die die Daten elektrisch übertragen, mehrere Vorteile. Es werden weitaus höhere Datenraten unterstützt, der Stromverbrauch ist geringer und der Abhörschutz der Übertragung ist besser.

Um die enormen Kosten eines solchen Infrastrukturausbaus möglichst klein zu halten, wird mathematische Optimierung zur Planung der neuen Netze eingesetzt. In dieser Arbeit wird ein solches Programm zur optimierten Planung eines Glasfaserzugangsnetzes, genannt ZuPlaTo, vorgestellt.

Dazu werden im ersten Kapitel zunächst das Konstrukt „Glasfaserzugangsnetz“ ausführlich erläutert, um darauf aufbauend das entsprechende mathematische Problem zu formulieren. Anschließend wird der in ZuPlaTo implementierte Prozess zur Lösung dieses Problems dargelegt.

In den beiden Kapiteln 2 und 3 werden zwei Postoptimierungsalgorithmen für ZuPlaTo vorgestellt, das Shiften und die Kreisentfernung. Die Algorithmen versuchen Verbesserungspotenziale in der von ZuPlaTo errechneten Lösung zu finden, indem systematisch strukturelle Schwächen des Lösungsprozesses ausgenutzt werden. Die Kapitel sind dabei so aufgebaut, dass nach einer formalen Definition des jeweiligen Algorithmus das theoretische Verbesserungspotenzial untersucht wird. Anschließend werden die konkret implementierten Umsetzungen der Algorithmen erläutert und deren Korrektheit bewiesen.

In einem abschließenden Kapitel 4 werden die Rechenergebnisse aller implementierten Varianten der beiden Postoptimierungsalgorithmen vorgestellt und ausgewertet. Die Postoptimierungsalgorithmen wurden vom Autor der Arbeit eigenhändig implementiert.

Kapitel 1

Problembeschreibung

Dieses Kapitel soll zunächst einen einführenden Überblick über das Problem der Optimierung von Glasfaserzugangsnetzen geben. Dazu wird zu Beginn ausführlich erläutert, was genau ein Glasfaserzugangnetz ist. Anschließend wird ein mathematisches Modell definiert, welches das Problem modelliert. Im letzten Abschnitt wird dann das Programm ZuPlaTo (Zugangnetz-Planungs-Tool) vorgestellt, welches ein Tool zur optimierten Planung dieser Netze darstellt und das auf Basis des mathematischen Modells arbeitet.

1.1 FTTx

ZuPlaTo ist, dem Namen nach, auf den Aufbau von sogenannten *Zugangsnetzen* (engl. access network) ausgerichtet. Diese gewährleisten die Anbindung von Kunden an höhere Netzebenen und bilden damit die sogenannte „Letzte Meile“ der Verbindung zum Kunden. Zugangsnetze verbinden Kunden mit einem zentralen Punkt, der als *Point of Presence* (PoP) bezeichnet wird. Dieser ist mit entsprechender Übertragungstechnik ausgerüstet und wird durch höhere Netzebenen versorgt. Als Synonym für glasfaserbasierte optische Zugangsnetze hat sich der Begriff „FTTx“ (Fiber To The x) etabliert. Das „x“ steht dabei für die verschiedenen Ausbaustufen des Glasfasernetzes. Je nachdem, bis zu welchem Punkt das Kupferkabel durch Glasfasern ersetzt wird, spricht man von

- FTTC (Fiber To The Curb): Glasfaser bis zum Kabelverzweiger auf der Straße; von diesem bis zum Kunden liegen Kupferkabel.
- FTTB (Fiber To The Building): Glasfaser bis in das Gebäude; im Gebäude liegen Kupferkabel.
- FTTH (Fiber To The Home): Glasfaser bis in die Wohnung; keine Kupferkabel.

1.1.1 Komponenten

Zum Aufbau einer Verbindung zwischen dem PoP und einem bestimmten Endpunkt (Kabelverzweiger, Gebäude oder Wohnung) müssen eine Reihe von *Komponenten* zusammenwirken. Den Kern und damit die hierarchisch unterste Ebene einer Verbindung bilden dabei die Glasfasern. Sie sind fest in Kabel eingebettet, sodass sich Kabel durch die Anzahl der beinhaltenden Glasfasern kategorisieren lassen. Die einzelne Glasfaser existiert also nur innerhalb von Kabeln. Diese Kabel werden wiederum innerhalb von Rohren verlegt, welche Schutz vor äußeren Einflüssen gewährleisten. Um bei der Verwendung dieser Komponenten eine Mindestübertragungsqualität zu gewährleisten, existieren verschiedene, technisch bedingte Längenbeschränkungen.

Neben diesen *streckengebundenen Komponenten* werden auch *Komponenten an Standorten* benötigt. So ist jeweils am PoP und am Endpunkt einer Faser ein Transponder zum Senden und Empfangen der Signale notwendig. Weitere Komponenten können zwischen dem Start- und Endpunkt verwendet werden. So werden Übergänge von einer Faser auf die nächste in sogenannte Muffen verlegt. Dies sind Kästen, in denen solche nichttrivialen Verbindungen durchgeführt und geschützt werden können.

Eine weitere Komponente bilden die *Splitter*. Sie spalten das Signal einer Glasfaser auf zwei Fasern auf, wobei die Signalstärke auf jeder der beiden Fasern die Hälfte der ursprünglichen Signalstärke beträgt. Dies geschieht rein optisch und somit passiv, also ohne Stromverbrauch. Die Splitter werden meist in Muffen untergebracht und verbrauchen damit Platz, also Kapazitäten, in der Muffe.

Anhand von Splitttern werden FTTx-Netze in PON- (passiv optical network) und P2P-Netze (point to point) eingeteilt. Bei PON-Netzen werden Splitter verwendet, welche ein aus dem PoP ausgehendes Signal auf mehrere Fasern aufteilt und mit diesem mehrere Endpunkte versorgt. Im Gegensatz dazu gibt es in P2P-Netzen immer 1:1 Verbindungen zwischen PoP und Endpunkt, das heißt, dass eine aus dem PoP ausgehende Faser zu genau einem Endpunkt gehört.

Allen Komponenten ist gemein, dass sie zum einen *Anschaffungskosten* und zum anderen *Installationskosten* verursachen. Die Installationskosten bestehen dabei zum Beispiel aus Kosten für das Verlegen eines Kabels in ein Rohr oder für den Aufbau einer Muffe mit korrekter Faserverknüpfung.

1.1.2 Setupkosten

Das eben erwähnte Verlegen sowie die Lagerung der Komponenten verursacht unabhängig von den explizit verlegten Komponenten Kosten auf Strecken und in Standorten. Diese Kosten werden *Setupkosten* genannt. Für einen PoP liegen die Setupkosten in dem Erwerb, der Anmietung oder dem Bau von gewissen Räumlichkeiten zur Unterbringung der

Komponenten, wogegen Splitter und Muffen in Schächten deponiert werden. Zur Verbindung des PoP mit dem Endpunkt müssen die entsprechenden Kabel und Rohre wiederum verlegt werden, wobei die Strecke, über die dies geschieht, stark über die Setupkosten, die Kosten des nötigen Tiefbaus, entscheidet. Da diese Tiefbaukosten fast die Hälfte aller Investitionskosten, also aller Komponenten- und Setupkosten, ausmachen, ist die Streckenauswahl besonders bedeutsam. (vgl. Kapitel 6 [Rig11]) Falls eine Kante eröffnet wird, also über sie Verbindungen verlegt werden und Setupkosten anfallen, stellt sie unbegrenzt Kapazitäten zur Verlegung von Installationen zur Verfügung.

Eine Möglichkeit bei der Verlegung Kosten einzusparen ist die Nutzung schon *existierender Infrastruktur*. Diese kann aus leeren Rohren, nicht genutzten Fasern in schon verlegten Kabeln oder auch Gebäuden bestehen, die zur freien Nutzung zur Verfügung stehen. Reicht diese Infrastruktur aus, die benötigten Komponenten unterzubringen, entfallen die sonst anfallenden Setupkosten. Auch wenn die Kapazitäten nicht ausreichen und Setupkosten anfallen, lohnt sich die Nutzung der vorhandenen Infrastruktur, da sie Anschaffungs- oder Mietkosten verringert.

1.1.3 Bündelungseffekt

Beim Aufbau von FTTx-Netzen ist es prinzipiell ratsam, möglichst viele Komponenten entlang derselben Strecken zu verlegen. Dies liegt zum einen an den dadurch erreichten Einsparungen von Setupkosten, da eine Strecke nur einmal Kosten für den Tiefbau verursacht. Zum anderen werden Komponentenkosten gespart, da wenige Komponenten mit großen Kapazitäten weniger Anschaffungs- und Installationskosten verursachen als viele Komponenten mit kleinen Kapazitäten. Dieser Effekt der Kosteneinsparung auf Grund der Bündelung von Streckenkomponenten und Zusammenlegung von Standorten wird im weiteren Verlauf als *Bündelungseffekt* bezeichnet.

Bei dieser Bündelung ist jedoch zu beachten, dass dies auch die Reichweite von Ausfällen erhöht. Deswegen gibt es meist neben den Kapazitätsbeschränkungen der Komponenten gewisse Beschränkungen für die Anzahl an Installationen auf einer Strecke oder an einem Standort um die Ausfallreichweite zu begrenzen. Außerdem gilt, dass eine Bündelung von Komponenten diese meist verlängert. Es ist also nötig, zwischen den Kostenvorteilen aus der Bündelung und der Verkürzung der Komponenten abzuwägen.

Hiermit ist das reale Problem für den Zweck dieser Arbeit ausreichend beschrieben. Für weiterführende Informationen sei auf das „FTTH Handbook“ [Rig11] verwiesen.

1.2 Mathematisches Modell

Damit ein Problem, wie das in Teil 1.1 beschriebene, mathematisch gelöst werden kann, muss es zuerst formal definiert werden. Dieser Vorgang wird Modellierung des Problems genannt und bedarf großer Sorgfalt, da die Güte der erhaltenen Lösung essenziell vom mathematischen Modell abhängt.

Im Folgenden werden zunächst einige Grundbegriffe definiert, auf denen dann die weitere Modellbeschreibung aufbaut. Dabei beinhaltet die Modellierung keine existierende Infrastruktur, da diese für die weiteren Ausführungen unberücksichtigt bleibt. Das Modell kann jedoch um entsprechende Inhalte erweitert werden.

Alle verwendeten Parameter und Begriffe werden direkt oder im weiteren Verlauf der Arbeit erläutert. Die grundlegenden Begriffe der Graphentheorie sind [Jun94] entnommen.

Für die weitere Arbeit bezeichnet \mathbb{Q}_+ die Menge der positiven rationalen Zahlen einschließlich der Null und \mathbb{N} die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich der Null.

1.2.1 Trassennetz

Das zentrale Element des Modells bildet die Darstellung der möglichen Strecken zur Verlegung der Komponenten als Graph.

Definition 1.1 (Trassennetz). *Ein Trassennetz, im weiteren Verlauf auch einfach Netzwerk genannt, ist ein ungerichteter Graph (V, E) .*

Eine Kante $e \in E$ hat die Parameter

- $l_e \in \mathbb{Q}_+$ Länge
- $c_e \in \mathbb{Q}_+$ Setupkosten

Ein Knoten $v \in V$ hat die Parameter

- $c_v \in \mathbb{Q}_+$ Setupkosten

In der Menge der Knoten gibt es wiederum Teilmengen mit speziellen Eigenschaften, die potenziellen Standorte. Diese unterteilen sich in die drei folgenden Typen.

Definition 1.2 (CO). *Ein Central Office $C \in V$ ist ein Knoten mit folgenden zusätzlichen Parametern:*

- $m_C \in \{0, 1\}$ Eröffnungspflicht
- $\hat{k}_C \in \mathbb{N}$ Maximale Anzahl an ausgehenden Fasern
- $\bar{k}_C \in \mathbb{N}$ Maximale Anzahl an zugehörigen Anwohnern
- $r_C \in \mathbb{Q}_+$ Maximale Entfernung von C zu einem angebotenen DP (siehe Def. 1.3)

Der CO lässt sich als PoP des realen Problems interpretieren. Dementsprechend muss jeder BTP (siehe Definition 1.4) des FTTx-Netzes über Glasfaserverbindungen an einen CO angebunden werden. Da der CO als Versorgeeinheit interpretiert werden kann, verlaufen die Fasern immer vom CO weg, bzw. aus dem CO ausgehend.

Definition 1.3 (DP). *Ein Distribution Point $D \in V$ ist ein Knoten mit folgenden zusätzlichen Parametern:*

- $m_D \in \{0, 1\}$ *Eröffnungspflicht*
- $\hat{k}_D \in \mathbb{N}$ *Maximale Anzahl an ausgehenden Fasern*
- $\bar{k}_D \in \mathbb{N}$ *Maximale Anzahl an zugehörigen Anwohnern*
- $r_D \in \mathbb{Q}_+$ *Maximale Entfernung zu einem angebenen BTP (siehe Def. 1.4)*

Ein DP dient der Unterbringung von Splittern und Muffen. Dabei wird eine Faser, die aus dem DP hinausführt immer eindeutig einer in den DP hineinführenden Faser zugeordnet. Werden Splitter verwendet, können entsprechend mehrere ausgehende Fasern einer eingehenden zugeordnet werden. Eingehende Fasern kommen dabei von einem CO und ausgehende Fasern verlaufen zu einem BTP (siehe Definition 1.4).

Definition 1.4 (BTP). *Ein Building Termination Point $B \in V$ ist ein Knoten mit folgenden zusätzlichen Parametern:*

- $m_B \in \{0, 1\}$ *Anbindungspflicht*
- t_B *Kudentyp*
- $A_B \in \mathbb{N}$ *Anzahl der Anwohner*
- $d_B \in \mathbb{N}$ *Bedarf an Fasern*
- $\sigma_B \in \mathbb{N}$ *Maximales Splittingverhältnis*
- $p_B \in \mathbb{Q}_+$ *Ertrag, den eine Anbindung von B einbringt*
- $r_B \in \mathbb{Q}_+$ *Maximale Entfernung zu einem zugehörigen CO*

Ein BTP ist der Abnehmer im FTTx-Netz und kann für verschiedene Endpunkte wie Kabelverzweiger, Gebäude oder Wohnungen stehen. Deswegen führen Fasern immer in einen BTP hinein, niemals hinaus. Das Splittingverhältnis eines BTP sagt aus, wie oft eine Faser, die den BTP anbindet und von einem CO kommt, auf diesem Weg gesplittet worden sein darf. Der Kudentyp kann einer beliebigen Kategorie wie „Privatkunde“ und „Geschäftskunde“ angehören.

Die allen potenziellen Standorttypen gegebenen Entfernungsbeschränkungen sollen zum einen eine zu starke Zentralisation verhindern und zum andere die technischen Längenbeschränkungen der Streckenkomponenten widerspiegeln.

Bemerkung. In der Realität sind Fasern nicht gerichtet, da über eine Faser sowohl in die eine, als auch in die andere Richtung Daten gesendet werden können. Dieser Aspekt ist jedoch für die Modellierung nicht relevant. Deswegen ist eine Festlegung der Richtung

einer Faser zur vereinfachten Erkennung von Start- oder Endstandorttyp möglich. So ist mit der oben eingeführten Konvention erkennbar, dass beispielsweise eine in einen DP eingehende Faser diesen mit einem CO verbindet.

1.2.2 Installationen

Installationen repräsentieren verlegte Strecken- und eingerichtete Standortkomponenten. Im Falle der Streckeninstallationen verbinden sie also Knoten im Netzwerk, während Standortinstallationen einem bestimmten Standort zugeordnet sind.

Die benötigten Streckeninstallationen sind wie folgt definiert:

Definition 1.5 (Faserinstallation). *Eine Faserinstallation f ist eine Streckeninstallation. Sie besitzt als Parameter*

- t_f Fasertyp
- $\bar{c}_f \in \mathbb{Q}_+$ Fixkosten
- $\hat{c}_f \in \mathbb{Q}_+$ längenabhängige Kosten
- π_f Pfad im Trassennetz
- $l_f \in \mathbb{Q}_+$ Länge des Pfades im Trassennetz
- E_f Menge an Kabelinstallationen

Definition 1.6 (Kabelinstallation). *Eine Kabelinstallation g ist eine Streckeninstallation. Sie besitzt als Parameter*

- t_g Kabeltyp
- $\bar{c}_g \in \mathbb{Q}_+$ Fixkosten
- $\hat{c}_g \in \mathbb{Q}_+$ längenabhängige Kosten
- π_g Pfad im Trassennetz
- $l_g \in \mathbb{Q}_+$ Länge des Pfades im Trassennetz
- E_g Menge an Rohrinstallationen

Definition 1.7 (Rohrinstallation). *Eine Rohrinstallation h ist eine Streckeninstallation. Sie besitzt als Parameter*

- t_h Rohrtyp
- $\bar{c}_h \in \mathbb{Q}_+$ Fixkosten
- $\hat{c}_h \in \mathbb{Q}_+$ längenabhängige Kosten
- π_h Pfad im Trassennetz
- $l_h \in \mathbb{Q}_+$ Länge des Pfades im Trassennetz

Der jeder Streckeninstallation zugeordnete Pfad beschreibt den Verlauf dieser Installation im Trassennetz. Ein Pfad ist dabei ein einfacher Weg und besucht jeden Knoten maximal einmal. Dementsprechend ist die Länge eines Pfades die Summe der Längen seiner Kanten.

Weiterhin repräsentiert die Menge E_f einer Faserinstallation f , bzw. die Menge E_g einer Kabelinstallation g die zur Einbettung von f bzw. g nötigen Installationen höherer Hierarchie. Eine Faser- bzw. Kabelinstallation ist also eindeutig in einer bestimmten Menge an Kabel- bzw. Rohrinstallationen eingebettet.

Der Faser-, Kabel- oder Rohrtyp einer Installation stellt die jeweils verwendete Komponente dar. Von ihm hängen weitere Parameter ab, wie Kompatibilitäten zu anderen Installationen sowie beinhaltende Kapazitäten, welche hier nicht näher betrachtet werden, da sie für die weiteren Betrachtungen der Arbeit nicht von Bedeutung sind. Neben den Installationen auf Strecken existieren auch Standortinstallationen wie Muffen- oder Splitterinstallationen, welche aus denselben Gründen nicht weiter erläutert werden. Dabei können an einem Standort durchaus mehrere Standortinstallationen eingerichtet werden.

1.2.3 Gültiges FTTx-Netz

Mit Hilfe der definierten Elemente lässt sich nun ein (im mathematischen Sinne) *gültiges FTTx-Netz* beschreiben. Ein solches Netz ist eine Menge an Installationen, die eine Reihe von Bedingungen erfüllen. Diese Bedingungen sind nachfolgend angeführt.

Eine Faserinstallation muss immer zwischen zwei Standorten verlaufen, also zwischen BTP, DP und CO. Dabei müssen immer zwei verschiedene Standorttypen verbunden werden.

Bei der Verbindung zweier Standorte sind die jeweiligen Entfernungsbegrenzungen einzuhalten. Dabei gilt, dass eine Anbindung eines BTP an einen CO auch aus zwei Faserinstallationen, die einmal vom CO zum DP und einmal vom DP zum BTP führen, bestehen kann. Die Entfernung der entsprechenden Verbindung von CO zum BTP ergibt sich dann aus der Summe der Entfernungen von CO zu DP und von DP zu BTP.

Endet mindestens eine Faserinstallation an einem potenziellen Standort oder fängt dort an, ist an diesem eine entsprechende Standortinstallation einzurichten. Ein potenzieller Standort mit Installation wird damit zu einem (eröffneten) Standort und verursacht genauso wie ein potenzieller Standort mit Eröffnungspflicht Setupkosten.

Für jede Kante im Trassennetz gilt, dass für die Anzahl an Fasern entsprechende Kabelkapazitäten auf dieser Kante installiert sein müssen. Dabei sind die Kompatibilitäten zwischen Fasern und Kabeln zu beachten. Eine Faser kann also nur in einem mit ihr kompatiblen Kabel verlegt werden. Analog muss die auf einer Kante befindliche Menge an Rohren genügend kompatible Kapazitäten für die Menge an Kabeln auf der Kante bieten. Falls über eine Trassennetzkante mindestens eine der Streckenkomponenten verläuft, fallen Setupkosten für diese Kante an.

Weiterhin muss der Bedarf an Fasern jedes angebotenen BTP gedeckt sein, das heißt, es muss die entsprechende Anzahl an Faserinstallationen in den BTP eingehen. BTPs

mit Anbindungspflicht müssen dabei angebunden werden. Für die restlichen BTPs ist die Anbindung optional.

Für einen DP wiederum gelten ähnliche Bedingungen. Die Menge an ausgehenden BTP-Faserinstallationen muss in einer Menge an eingehenden CO-Faserinstallationen ihre Entsprechung finden. Dabei muss die Anzahl auf Grund von installierten Splitttern nicht identisch sein. Die Faseranzahlen müssen aber nach der Verrechnung mit den entsprechenden Spliterraten zueinander passen. Beim Splitting sind die maximalen Splittingraten der BTPs einzuhalten.

Schließlich müssen die Kapazitäten von DPs und COs eingehalten werden. Sowohl die ausgehenden Fasern als auch die angebundene Anwohneranzahl dürfen die jeweils gegebenen Grenzen nicht überschreiten. Dabei gelten die Anwohner eines BTP auch dann als an einen CO angebunden, wenn dies nur über einen DP geschieht.

1.2.4 Problemstellung

Das Problem besteht also im Finden eines gültigen FTTx-Netzes. Dabei sind als Ausgangsdaten ein Trassennetzwerk sowie eine Menge an verwendbaren Strecken- und Standortkomponenten mit jeweiligen Eigenschaften gegeben.

Außerdem existieren eine Reihe weiterer *globaler Parameter*. So ist zu jeder Kundenkategorie, der mindestens ein BTP angehört, eine Anbindungsrate gegeben. Diese sagt aus, welcher prozentuale Anteil der gesamten möglichen Nutzer einer Kategorie mindestens angebunden werden muss.

Weiterhin sind Einschränkungen wie zum Beispiel eine maximale festgelegte Anzahl an zu eröffnenden DPs bzw. COs oder Laufzeitbeschränkungen für den Lösungsprozess gegeben.

1.3 Lösungsprozess von ZuPlaTo

Nachdem das Problem nun formal definiert ist, kann der Lösungsprozess von ZuPlaTo beschrieben werden. Ziel ist dabei, eine Menge an Installationen zu finden, die die unter Teil 1.2.3 beschriebenen Bedingungen erfüllt und dabei möglichst kostengünstig ist.

1.3.1 Lösungsalgorithmus

Auf Grund der enormen Komplexität des beschriebenen Problems ist der Lösungsprozess von ZuPlaTo in drei Abschnitte unterteilt:

- Der *DP-Usecase*, welcher die Pfade für Faserinstallationen vom DP zum BTP festlegt.
- Der *CO-Usecase*, welcher die Pfade für Faserinstallationen vom CO zum DP festlegt.
- Der *Installations-Usecase*, welcher Faserinstallationen auf den festgelegten Pfaden und dazu passende Kabel-, Rohr- und Standortinstallationen einrichtet.

Da vor allem die ersten beiden Usecases Grundlage für die folgenden Kapitel sind, werden nur diese näher erläutert.

Vom prinzipiellen Aufbau sind sich der DP- und CO-Usecase sehr ähnlich. Beide haben das Ziel, eine Menge von Konsumentenknotten mit einem gewissen Faserbedarf an Anbieterknotten anzubinden. Im DP-Usecase bilden die BTPs die Konsumenten und die DPs die Anbieter, während im CO-Usecase die DPs Konsumenten sind und die COs die Anbieter. Aufgrund dieser strukturellen Ähnlichkeit gibt es einen zu Grunde liegenden Algorithmus für beide Usecases, den *Concentrator Location Algorithmus*.

Concentrator Location Algorithmus

In mehreren vorbereitenden Schritten wird das Netzwerk zunächst vereinfacht. Dabei werden Knoten, die keine potenziellen Standorte sind und Knotengrad kleiner oder gleich 2 haben, eliminiert. Die entsprechenden Kanten werden bei Knoten von Grad 2 zusammengefügt und bei Knoten von Grad 1 entfernt. Genauso gelöscht werden zum Beispiel *Drop-Trails*, also einzelne Kanten, die einen BTP mit dem restlichen Netz verbinden. Der BTP wird dabei auf den anderen Knoten der gelöschten Kante gesetzt, wobei Drop-Trails nur gelöscht werden, wenn dieser zweite Knoten vorher kein potenzieller Standort war. Weiterhin werden auch die Teile des Graphen nicht mehr berücksichtigt, welche auf Grund der Graphenstruktur oder der Längenbeschränkungen nicht erreichbar sind.

Der nächste Schritt ist die sogenannte Pfadgenerierung. In diesem wird von jedem Konsumentenknotten eine festgelegte Menge an Pfaden zu möglichen Anbieterknotten erzeugt. Aus diesen wird dann im weiteren Verlauf derjenige bestimmt, über den der Konsument angebunden wird. Das Ziel ist dabei, möglichst die günstigen Pfade für jeden Konsumenten zu erzeugen und die restlichen Pfade nicht mehr zu betrachten. Damit verringert sich wiederum die Komplexität des Problems, wobei durch die Erzeugung günstiger Pfade versucht wird, die guten Gesamtlösungen nicht auszuschließen. Zur Erzeugung dieser Pfade existieren mehrere Strategien. Die Wichtigsten beinhalten die Suche nach kürzesten Wegen sowohl auf Kantenlängen- als auch auf Kantenkostenbasis.

Zusätzlich werden im DP-Usecase auch mögliche Pfade von den DPs zu möglichen COs erzeugt. Anschließend erhalten BTP-DP-Pfade, die ganz oder zum Teil über diese DP-CO-Pfade verlaufen, eine günstigere Bewertung. Damit soll zum Ausdruck gebracht werden, dass eine Verlegung von BTP-DP- und DP-CO-Installationen über die gleiche Kante nur einmal Setupkosten für diese Kante verursacht. Entsprechend finden die schon festgeleg-

ten BTP-DP-Verbindungen auch im CO-Usecase Beachtung. Die günstigere Bewertung entspricht dabei jedoch keiner Entfernung der Setupkosten auf den jeweiligen Kanten, sondern nur einer Verringerung der Kosten. Das ist der Tatsache geschuldet, dass durch Postoptimierungsmethoden die Installationen noch auf andere Pfade verschoben werden können. Somit ist die Kosteneinsparung durch Verwendung gleicher Kanten in beiden Usecases zwar wahrscheinlich, jedoch nicht sicher.

Nachdem die entsprechenden Pfadmengen bereitstehen, werden nun die zu benutzenden Anbindungswege im jeweiligen Usecase bestimmt. Dazu wird ein ganzzahliges Problem, ein IP bzw. ILP, formuliert (vgl. I 1.1 [ES00]), welches die möglichen Verbindungen der Knoten beschreibt, die sich aus diesen Pfaden ergeben. Außerdem werden alle Anbindungspflichten, Bedarfe und Kapazitätsbeschränkungen modelliert. Zusätzlich gibt es die Restriktion, dass ein Konsument immer genau einem Anbieter zugeordnet werden muss. Das IP wird durch einen adäquaten Solver gelöst, wodurch die zu benutzenden Pfade zwischen Anbieter- und Konsumentenknotten bestimmt werden. Durch die Verwendung eines IPs kann der maximale Abstand, genannt *Gap*, der bestimmten Pfadauswahl von einer optimalen Pfadauswahl ermittelt werden. In der Regel wird dieses IP auf Grund seiner Größe und Komplexität nicht optimal, also mit *Gap* gleich 0, gelöst.

Nachdem die Pfade der Glasfaserinstallationen und damit auch die zu eröffnenden Anbieterknotten bestimmt sind, wird das Netz in nachbereitenden Schritten noch einmal bearbeitet. Es wird wieder in seine ursprüngliche Form gebracht, indem die Vereinfachungen aus der Vorbereitung wieder rückgängig gemacht werden. Außerdem können einzelne Pfadbereiche durch die Betrachtung spezieller Aspekte noch einmal nachgebessert werden.

Im DP-Usecase werden abschließend noch zu installierende Splitter für die jeweiligen eröffneten DP-Standorte bestimmt. So lässt sich für jeden DP-Standort der Bedarf an eingehenden Fasern für den CO-Usecase bestimmen.

1.3.2 Struktur der Lösung

Aus der Struktur des Lösungsprozesses ergeben sich spezielle Eigenschaften der Lösung, die für die weiteren Betrachtungen von Bedeutung sind.

So existieren keine direkten Fasern von einem CO zu einem BTP. Faserinstallationen verlaufen entweder vom CO zum DP oder vom DP zum BTP. Deswegen definieren wir eine weitere Eigenschaft von Faserinstallationen, die Stufe.

Definition 1.8 (Stufe). *Die Stufe einer Faserinstallation beschreibt die Standorttypen zwischen denen sie verläuft. Dabei unterteilen sie die in ZuPlaTo installierten Fasern in solche, die der DP-CO-Stufe angehören und solche die der BTP-DP-Stufe angehören.*

Wir sagen, Faserinstallationen sind *stufengebunden*, während Kabel- und Rohrinstallationen *nicht stufengebunden* sind.

Außerdem wird durch die im Algorithmus beschriebene Beschränkung ein BTP immer genau einem DP zugeordnet und ein DP immer genau einem CO. Daraus ergibt sich die Definition eines Kundennetzwerkes.

Definition 1.9 (Kundennetzwerk). *Das Kundennetzwerk eines DP D ist der Teilgraph des Trassennetzes, welcher genau die Kanten und Knoten beinhaltet, die Teil des Pfades einer von D zu einem BTP verlaufenden Faserinstallation sind.*

Entsprechend ist das DP-Netzwerk eines CO definiert.

Definition 1.10 (DP-Netzwerk). *Das DP-Netzwerk eines CO C ist der Teilgraph des Trassennetzes, welcher genau die Kanten und Knoten beinhaltet, die Teil des Pfades einer von C zu einem DP verlaufenden Faserinstallation sind.*

Aus diesen Definitionen ergibt sich das folgende Korollar.

Korollar 1.11. *Sowohl das Kundennetzwerk eines DP als auch das DP-Netzwerk eines CO sind zusammenhängend.*

Beweis. Sei D ein DP und N das Kundennetzwerk von D . Sei S ein beliebiger Knoten in N . Dann liegt S nach Definition eines Kundennetzwerkes auf dem Pfad π_f von mindestens einer Faserinstallation f von D zu einem BTP. Also ist S von D aus über π_f erreichbar und demnach ist jeder Knoten in N von D aus erreichbar. Also existiert für zwei Knoten S_1 und S_2 in N immer ein Weg von S_1 nach S_2 über D . Also ist N zusammenhängend. Der Beweis für das DP-Netzwerk eines CO verläuft analog. \square

Kapitel 2

Shiften

Mit dem in Teil 1.3 beschriebenen Lösungsalgorithmus können nur bedingt gute Lösungen erstellt werden. Dies liegt vor allem an der Aufteilung des Lösungsprozesses in mehrere Einzelschritte. Diese können zwar für sich gesehen gut gelöst werden, jedoch werden Abhängigkeiten zwischen den Schritten nur teilweise beachtet.

Im Folgenden soll eine Methode vorgestellt werden, welche versucht Verbesserungspotenziale in der Schnittstelle zwischen DP- und CO-Usecase zu nutzen - das Shiften.

2.1 Was ist Shiften?

Definition 2.1 (Shiften). *Die Shift Methode, im weiteren Verlauf auch einfach Shiften genannt, ist ein Postoptimierungsalgorithmus. Als Eingabeparameter sind ihr gegeben:*

- Eine Probleminstanz P (nach 1.2.4)
- Ein gültiges FTTx-Netz L zur Instanz P (nach 1.2.3).

Aus diesen errechnet die Methode eine gültige Lösung \bar{L} von P mit den Eigenschaften:

- Für jeden eröffneten DP D in L existiert ein eröffneter DP \bar{D} in \bar{L} .
- \bar{D} war in L ein Knoten im Kundennetzwerk von D und ist ein potenzieller DP-Standort in P .
- Jeder in L an D angeschlossene BTP ist in \bar{L} an \bar{D} angeschlossen.
- Die Faserinstallationen zwischen einem BTP und einem DP D in L bleiben in \bar{L} dieselben. Sie starten nun lediglich in \bar{D} und haben somit einen anderen Pfad π und eine dementsprechende Länge l .
- \bar{D} ist in \bar{L} demselben CO zugeordnet wie D in L .
- Die Faserinstallationen zwischen einem CO und einem DP D in L bleiben in \bar{L} dieselben. Sie enden nun lediglich in \bar{D} und haben somit einen anderen Pfad π und

eine dementsprechen Länge l .

Außerdem existieren zwei Varianten der Methode:

- (a) mit neuen Standorten: Die Methode erhält als zusätzlichen Eingabeparameter eine Menge an Knoten, welche neue potenzielle DP-Standorte darstellen, die zu der Menge derer in P hinzugefügt werden. Die Lösung L bleibt dadurch gültig. Außerdem gilt, dass die neuen potenziellen DP-Standorte keine Knoten beinhalten, die in P potenzielle BTP-, DP- oder CO-Standorte sind.*
- (b) ohne neue Standorte: Die Menge der potenziellen DP-Standorten bleibt dieselbe wie in P .*

Die Shift Methode wird zur Postoptimierung eines FTTx-Netzes eingesetzt und versucht eine Lösung mit niedrigeren Gesamtkosten als die ihm gegebene zu finden, indem sie DP-Standorte verändert. Grundlage für die Annahme, dass DPs in einer von ZuPlaTo errechneten Lösung nicht optimal positioniert sind, ist die getrennte Berechnung von BTP-DP-Pfaden und DP-CO-Pfaden für die jeweiligen Faserinstallationen. So werden DPs zum Teil kaum in der Nähe ihrer zugehörigen COs positioniert womit die DP-CO-Verbindungen möglicherweise unnötig verlängert werden. Außerdem kann das IP im DP-Usecase erfahrungsgemäß nicht in annehmbarer Zeit optimal gelöst werden. Dementsprechend kann auch hier Potenzial für bessere BTP-DP-Pfade und damit bessere DP-Standorte existieren.

Ein weitere Möglichkeit, Verbesserungen zu erreichen, bietet die Variante (a) des Shiftens, das Hinzufügen neuer potenzieller DP-Standorte. In der realen Problemstellung ist die Verlegung von Muffen und Splittern nahezu überall möglich. Jedoch wird auf Grund von Komplexitätsverringerungen nur eine kleine Menge dieser Knoten als mögliche potenzielle DP-Standortmenge angegeben. Indem also DPs an neuen, bisher unbeachteten Standorten eröffnet werden können, wird wiederum Potenzial für Verbesserungen geschaffen.

2.2 Verbesserungspotenzial des Shiftens

Nachdem die Verbesserungsmöglichkeiten erörtert wurden, gilt es, sie auch formal nachzuweisen. Mathematisch gesehen ist vor allem die Frage nach der Höhe des Verbesserungspotenzials unter bestimmten Voraussetzungen von Bedeutung, welche im weiteren Verlauf untersucht wird.

Die Analyse konzentriert sich dabei auf die Kosteneinsparungen, die durch eine stärkere Einbeziehung der DP-CO-Verbindungen zu erreichen sind, und solche, die durch die Möglichkeit der Eröffnung von DPs an neuen potenziellen DP-Standorten ermöglicht werden. Dabei werden folgende allgemeine Annahmen getroffen:

Annahme 2.2. Alle DPs sind optimal positioniert bezüglich des DP-Usecases, bzw. das IP im DP-Usecase wurde optimal gelöst.

Das bedeutet, dass alle im weiteren Verlauf gefundenen Verbesserungsmöglichkeiten strukturelle Ursachen haben.

Annahme 2.3. Das jeweilige Kundennetzwerk eines jeden DP ist sowohl zusammenhängend als auch kreisfrei und damit ein Baum.

Nach Korollar 1.11 ist das Kundennetzwerk eines DP zusammenhängend. Wäre es nicht kreisfrei, läge offensichtliches Verbesserungspotenzial vor, denn Kreise in Kundennetzwerken lassen auf Kanten schließen, die bei geschickterer Auswahl der BTP-DP-Faserinstallationspfade geschlossen werden könnten (siehe Kapitel 3).

Annahme 2.4. Sobald ein Pfad einer Faserinstallation von einem CO zu einem DP erstmalig einen Knoten des Kundennetzwerkes dieses DP erreicht, verläuft der Pfad von diesem Knoten bis zum DP ausschließlich über Kanten des Kundennetzwerkes.

Auch hier könnten offensichtlich Kanten geschlossen werden um Setupkosten zu sparen, sollte diese Annahme nicht gelten (siehe ebenfalls Kapitel 3).

Annahme 2.5. Die Kundennetzwerke zweier DPs überschneiden sich nicht, teilen also weder Knoten noch Kanten.

Wie in den Annahmen zuvor läge offensichtliches Verbesserungspotenzial vor. Durch eine Umsortierung der angebotenen BTPs zwischen den DPs unter Berücksichtigung der Längen- und Kapazitätsbeschränkungen könnten Installationen verkürzt und Kosten gespart werden.

Annahme 2.6. Für alle potenziellen Standorte existieren keine Längenbeschränkungen, also gilt für einen potenziellen BTP-, DP- oder CO-Standort O das $r_O = \infty$.

Diese Annahme entfernt die durch die Längenbeschränkungen offensichtlich gegebene Beschränkung der Shiftverbesserung, um eine Untersuchung bezüglich anderer, struktureller Schranken zu ermöglichen.

Annahme 2.7. Die Setupkosten c_e einer Kante e sind proportional zur Länge l_e von e .

Diese Annahme gilt oftmals auch in realen Problemen, da es durchaus nachvollziehbar ist, für eine Strecke doppelter Länge die doppelten Grabekosten bezahlen zu müssen.

Zur Vereinfachung gilt außerdem folgende Annahme:

Annahme 2.8. Alle BTPs haben denselben Kundentyp sowie dieselbe Anbindungspflicht und Spliterrate 1. Also gilt für einen BTP b : $m_b = 1$ und $\sigma_b = 1$.

Aus den Annahmen und der Definition von Shiften ergeben sich eine Hand von Folgerungen.

Korollar 2.9. *Das Shiften der einzelnen DPs ist unabhängig voneinander.*

Beweis. DPs dürfen laut Definition 2.1 nur innerhalb ihres Kundennetzwerkes geschifft werden. Da es außerdem nach Annahme 2.5 keine Überschneidungen der Kundennetzwerke gibt, folgt die Behauptung. \square

Bemerkung. Im weiteren Verlauf von 2.2 wird deswegen stellvertretend immer nur ein DP D mit seinem zugehörigen Kundennetzwerk N und seinem ihn anbindenden CO C betrachtet.

Korollar 2.10. *Für einen Knoten X in N existieren die Pfade zu allen BTPs und der von C zu X . Zusätzlich sind die Pfade eindeutig.*

Beweis. Da N nach Annahme 2.3 ein Baum ist, existieren eindeutige Wege zwischen zwei Knoten von N . Weiterhin existiert nach Annahme 2.4 auch der Pfad von C zu X und ist mit der Festlegung von X eindeutig beschrieben. Dieser verläuft außerhalb von N identisch zum Pfad von C nach D und ab dem Knoten des ersten Eintretens des Pfades in N auf dem eindeutigen Pfad in N von diesem Knoten nach X . \square

Korollar 2.11. *Beim Shiften können sich nur die längenabhängigen Kosten \hat{c} von Installationen, die Setupkosten c_D des DP und die Setupkosten c der Kanten in N ändern. Außerdem ist der Kundennetzwerkgraph nach dem Shiften ein Teilgraph von N .*

Beweis. Beim Shiften bleiben nach Definition 2.1 die Fixkosten \bar{c} aller Installationen und die Kosten für die Standortinstallationen gleich. Also können sich lediglich die genannten Kosten ändern. Das Eröffnen neuer Kanten ist jedoch nach der Definition von Shiften und Korollar 2.10 nicht möglich. Damit ist das Kundennetzwerk nach dem Shiftvorgang ein Teilgraph von N . \square

Die Änderung der Menge an eröffneten Kanten in N und damit die Änderung der zugehörigen Setupkosten kommt nur in den seltenen Fällen der Schließung von Kanten vor. Dies ist der Fall, wenn D über eine einzige Kante mit dem restlichen Kundennetzwerk verbunden ist und diese Kante beim Wählen eines neuen Standorts nicht mehr Teil der Installationspfade ist (siehe Abbildung 2.1).

Mit diesen Voraussetzungen kann nun das Potenzial der Shiftmethode untersucht werden. Dabei unterscheiden wir die Betrachtung nach Variante (a) und (b) der Methode.

2.2.1 Shiften mit neuen Standorten

Satz 2.12. *Beim Shiften mit neuen potenziellen DP-Standorten gibt es keine Beschränkung der dadurch möglichen Kostenersparnis.*

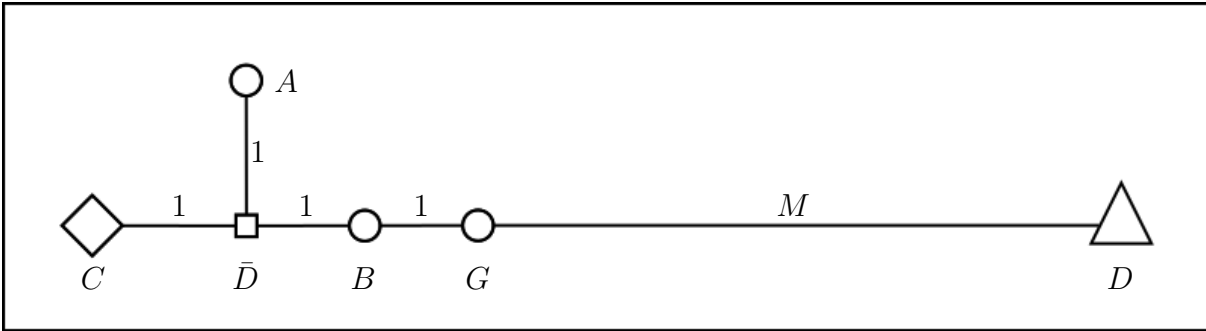


Abbildung 2.1: Grenzbeispiel für Shiftvariante (a)

Beweis. Für den Beweis der Unbeschränktheit ist lediglich ein geeignetes Beispiel zu finden. Ein solches sei in Abbildung 2.1 dargestellt. Dabei seien zu DP D und CO C die BTPs A , B und G gegeben. Die Kante $\{G, D\}$ soll die Länge M haben und die restlichen Kanten die Länge 1, wobei $M > 2$ gilt. Weiterhin haben Kanten und Knoten beliebige Setupkosten und die BTPs eine Anwohner- und Faserbedarfsanzahl, die von D und C versorgt werden kann. Zum Trassennetz sei außerdem eine Komponentenmenge gegeben, die eine Lösung ermöglicht und deren längenabhängige Kosten $\hat{c} > 0$ sind. Bei einer derartigen Ausgangssituation wird ZuPlaTo zwangsläufig D und C eröffnen und alle BTPs an D anbinden. Die Pfade sind auf Grund des Trassennetzes eindeutig.

Sei nun der Knoten \bar{D} als neuer DP-Standort zugelassen. Außerdem habe er Eigenschaften, die ihm eine Versorgung aller BTPs und eine Anbindung an C ermöglichen. Falls dieser als neuer DP-Standort gewählt werden würde, hätte dies folgende Konsequenzen:

- Die Setupkosten für Standort D entfallen, die für \bar{D} kommen hinzu.
- Die BTP-DP-Faserinstallationen zu A verkürzen sich um eine Länge von $M + 2$.
- Die BTP-DP-Faserinstallationen zu B verkürzen sich um eine Länge von M .
- Die BTP-DP-Faserinstallationen zu G verkürzen sich um eine Länge von $M - 2$.
- Die DP-CO-Faserinstallationen von C verkürzen sich um eine Länge von $M + 2$.
- Die Setupkosten für Kante $\{G, D\}$ entfallen.

Es verkürzen sich also alle Faserinstallationen, deren Menge fortan mit I bezeichnet wird, um mindestens $M - 2$. Für den weiteren Verlauf wird die Länge aller Faserinstallationen vor dem Shiften mit \check{l} und die Länge nach dem Shiften mit \tilde{l} bezeichnet.

Da D nur über die Kante $\{G, D\}$ zu erreichen war, verliefen alle Faserinstallationen über $\{G, D\}$ und demnach lief auch ein Großteil der Kabel- und Rohrinstallationen über $\{G, D\}$. Sei diese Menge an Kabel- und Rohrinstallationen die Menge \bar{I} , welche Teilmenge der Menge aller verlegten Kabel- und Rohrinstallationen vor dem Shiften \hat{I}_{old} ist. Die entsprechende Menge aller Kabel- und Rohrinstallationen nach dem Shiften sei mit \hat{I}_{new} bezeichnet. Nach dem Shiften können wiederum alle Kabel- und Rohrinstallationen

maximal die Länge 3 haben, da dies der längste Pfad im Kundennetzwerk von \bar{D} ist.

Seien nun mit c_{old} die Kosten vor dem Shiften und mit c_{new} die Kosten nach dem Shiften bezeichnet. Außerdem sei α der festen Setupkostenfaktor von $\{G, D\}$, also $\alpha := \frac{c_{\{G, D\}}}{l_{\{G, D\}}}$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 c_{\text{old}} - c_{\text{new}} &= \left(c_D + c_{\{G, D\}} + \sum_{i \in I} \tilde{l}_i \hat{c}_i + \sum_{j \in \tilde{I}_{\text{old}}} l_j \hat{c}_j \right) - \left(c_{\bar{D}} + \sum_{i \in I} \tilde{l}_i \hat{c}_i + \sum_{j \in \tilde{I}_{\text{new}}} l_j \hat{c}_j \right) \\
 &\geq c_D + c_{\{G, D\}} - c_{\bar{D}} + \sum_{i \in I} (\tilde{l}_i - \tilde{l}_i) \hat{c}_i + \sum_{j \in \tilde{I}} l_j \hat{c}_j - \sum_{j \in \tilde{I}_{\text{new}}} 3 \hat{c}_j \\
 &> c_D + \alpha M - c_{\bar{D}} + (M - 2) \sum_{i \in I} \hat{c}_i + M \sum_{j \in \tilde{I}} \hat{c}_j - 3 \sum_{j \in \tilde{I}_{\text{new}}} \hat{c}_j \\
 &= c_D - c_{\bar{D}} - 2 \sum_{i \in I} \hat{c}_i - 3 \sum_{j \in \tilde{I}_{\text{new}}} \hat{c}_j + M \left(\alpha + \sum_{i \in I} \hat{c}_i + \sum_{j \in \tilde{I}} \hat{c}_j \right)
 \end{aligned}$$

Für M gegen ∞ geht der letzte Term gegen ∞ . Damit ist die Kostenverbesserung unbeschränkt, da c_{new} wegen der Schließung von $\{G, D\}$ unabhängig von M ist. □

2.2.2 Shiften ohne neue Standorte

Zu Beginn dieser Analyse werden ergänzend noch zwei weitere Annahmen getroffen:

Annahme 2.13. Alle potenziellen DP-Standorte in N haben dieselben Setupkosten.

Annahme 2.14. Durch das Verschieben von D kommt es zu keiner Kantenschließung.

Diese dienen lediglich der Vereinfachung der folgenden Überlegungen.

Im Gegensatz zum Shiften mit neuen Standorten ist beim Shiften ohne neue Standorte D nach Annahme 2.2 optimal positioniert. Deswegen können nur längenabhängige Kosten der DP-CO-Installationen dafür sorgen, dass trotzdem ein anderer DP-Standort als D kostengünstiger ist. Da D nur in seinem Kundennetzwerk geshiftet wird und dieses ein Baum ist, werden die DP-CO-Installationen nach Korollar 2.10 maximal um die Länge des geshifteten Strecke verkürzt (Beweis folgt im Beweis zu Satz 2.19). Deswegen wird im weiteren Verlauf untersucht, ob diese Strecke begrenzt ist.

Dazu wird zuerst noch eine weitere Notation eingeführt.

Definition 2.15 (DP-Distanz). *Die eindeutige Distanz zwischen einem DP D und einem Knoten b in Kundennetzwerk von D , welches eine Baumstruktur hat, wird mit $\Delta_D(b)$ bezeichnet.*

Außerdem wird eine weitere Annahme gemacht.

Annahme 2.16. Zur Kabel- und Rohrintallation steht jeweils nur ein möglicher Kabel- bzw. Rohrtyp zur Verfügung. Diese sind jeweils so beschaffen, dass ihre Kosten proportional zur Anzahl ihrer zugehörigen Fasern sind.

Diese Aussage vereinfacht die reale Situation sehr stark. Jedoch ist a priori nicht vorhersagbar, wie sich eine Umlegung der Faserinstallationen auf die entsprechenden Kabel- und Rohrkosten auswirkt. Um trotzdem eine Analyse durchführen zu können muss eine solche Annahme getroffen werden.

Die entsprechende Annahme wird schließlich auch noch für Faserinstallationen getroffen.

Annahme 2.17. In einer Lösung ist nur ein einheitlicher Fasertyp verbaut.

Im Gegensatz zur vorherigen ist diese Aussage vergleichsweise realitätsnah, da in einem FTTx-Netz meist nur ein Fasertyp verwendet wird.

Lemma 2.18. *Sei \bar{D} ein weiterer möglicher DP-Standort im Kundennetzwerk von D sowie B die Menge der von D versorgten BTPs. Dann ist die Länge K des Pfades zwischen D und \bar{D} beschränkt durch die Pfadlängen von \bar{D} zu den BTPs in B . Genauer gilt: $K \cdot \sum_{b \in B} d_b \leq 2 \sum_{b \in B} \Delta_{\bar{D}}(b) \cdot d_b$.*

Beweis. Nach Annahme 2.2 ist D optimal positioniert. Weiter folgt aus Korollar 2.11 und den Annahmen 2.13 und 2.14, dass sich die Kosten der beiden Standorte D und \bar{D} nur in den längenabhängigen Kosten unterscheiden können. Zusammen mit Annahme 2.16 und 2.17 führt dies zu folgendem Schluss:

$$\sum_{b \in B} \Delta_D(b) \cdot d_b \leq \sum_{b \in B} \Delta_{\bar{D}}(b) \cdot d_b \quad (2.1)$$

Im Folgenden sei nun $b \in B$ ein beliebiger BTP. Sei weiterhin π der Pfad der Faserinstallation von D zu b , $\hat{\pi}$ der Pfad von D nach \bar{D} und $\bar{\pi}$ der Pfad von \bar{D} nach b .

Fall 1 $\hat{\pi}$ hat sowohl mit π als auch mit $\bar{\pi}$ gemeinsame Kanten.

Sei b^* der letzte gemeinsame Knoten der Pfade π und $\hat{\pi}$. Dann haben die Pfade bis zum Punkt b^* denselben Anfangsteil, da das Kundennetzwerk ein Baum ist und somit nur ein Weg von D nach b^* existiert. Nach dem gleichen Argument verläuft $\bar{\pi}$ über b^* . Weiterhin entspricht $\bar{\pi}$ von \bar{D} nach b^* der umgekehrten Kantenreihenfolge von $\hat{\pi}$ auf demselben Teilstück und von b^* nach b dem entsprechenden Teilstück in Pfad π (siehe Bild 2.2).

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \Delta_D(b^*) &\leq \Delta_D(b) \\ \Delta_{\bar{D}}(b^*) &\leq \Delta_{\bar{D}}(b) \\ \Delta_D(b^*) + \Delta_{\bar{D}}(b^*) &= K \end{aligned}$$

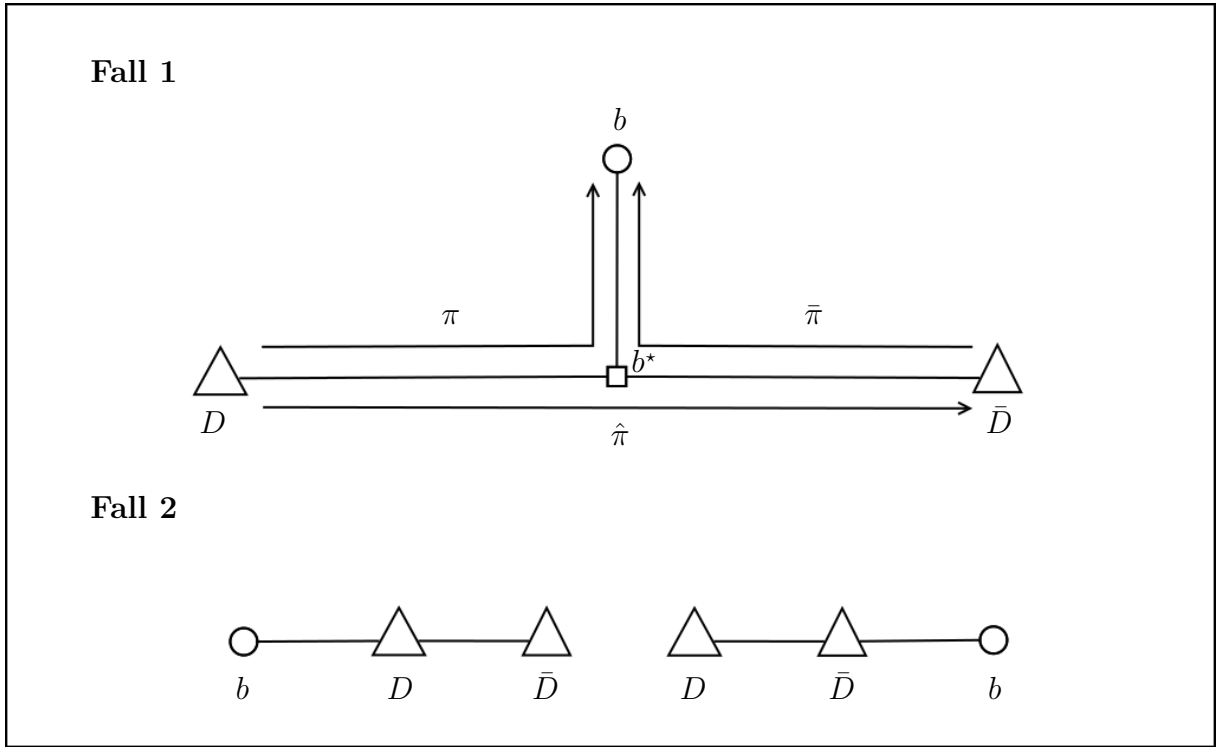


Abbildung 2.2: Veranschaulichung zu Beweis von Lemma 2.18

Daraus folgt:

$$K \leq \Delta_D(b) + \Delta_{\bar{D}}(b) \quad (2.2)$$

Fall 2 $\hat{\pi}$ ist ein Teilpfad von π oder $\bar{\pi}$.

In diesem Fall ist offenbar $K \leq \Delta_D(b)$ oder $K \leq \Delta_{\bar{D}}(b)$, weswegen direkt gilt:

$$K \leq \Delta_D(b) + \Delta_{\bar{D}}(b) \quad (2.3)$$

Sei nun $B = B_1 \dot{\cup} B_2$, wobei $B_1 \subseteq B$ die Menge an BTPs ist, die unter Fall 1 fällt, und $B_2 \subseteq B$ die Menge, die unter Fall 2 fällt. Dann folgt durch Multiplizieren der Ungleichung (2.2) mit d_b und Summierung über alle BTPs:

$$\sum_{b \in B_1} K \cdot d_b \leq \sum_{b \in B_1} d_b (\Delta_D(b) + \Delta_{\bar{D}}(b))$$

Analog folgt mit Ungleichung (2.3):

$$\sum_{a \in B_2} K \cdot d_a \leq \sum_{a \in B_2} d_a (\Delta_D(a) + \Delta_{\bar{D}}(a))$$

Addition der letzten beiden Ungleichungen ergibt wiederum:

$$\sum_{b \in B} K \cdot d_b \leq \sum_{b \in B} d_b (\Delta_D(b) + \Delta_{\bar{D}}(b)) \stackrel{(2.1)}{\leq} \sum_{b \in B} d_b \cdot 2\Delta_{\bar{D}}(b)$$

□

Mit diesem Lemma lässt sich nun der folgende Satz beweisen:

Satz 2.19. *Durch Shiften ohne neue Standorte kann maximal eine Gesamtkostenverbesserung von $\frac{2}{3}$ der Ausgangskosten erreicht werden.*

Beweis. Sei wieder \bar{D} der neue durch Shiften erreichte DP-Standort und B die Menge der von D versorgten BTPs. Außerdem sei K die Länge der Verbindung zwischen D und \bar{D} , L_D die Länge der Verbindung von C zu D und $L_{\bar{D}}$ die Länge der Verbindung von C zu \bar{D} (siehe Abbildung 2.3).

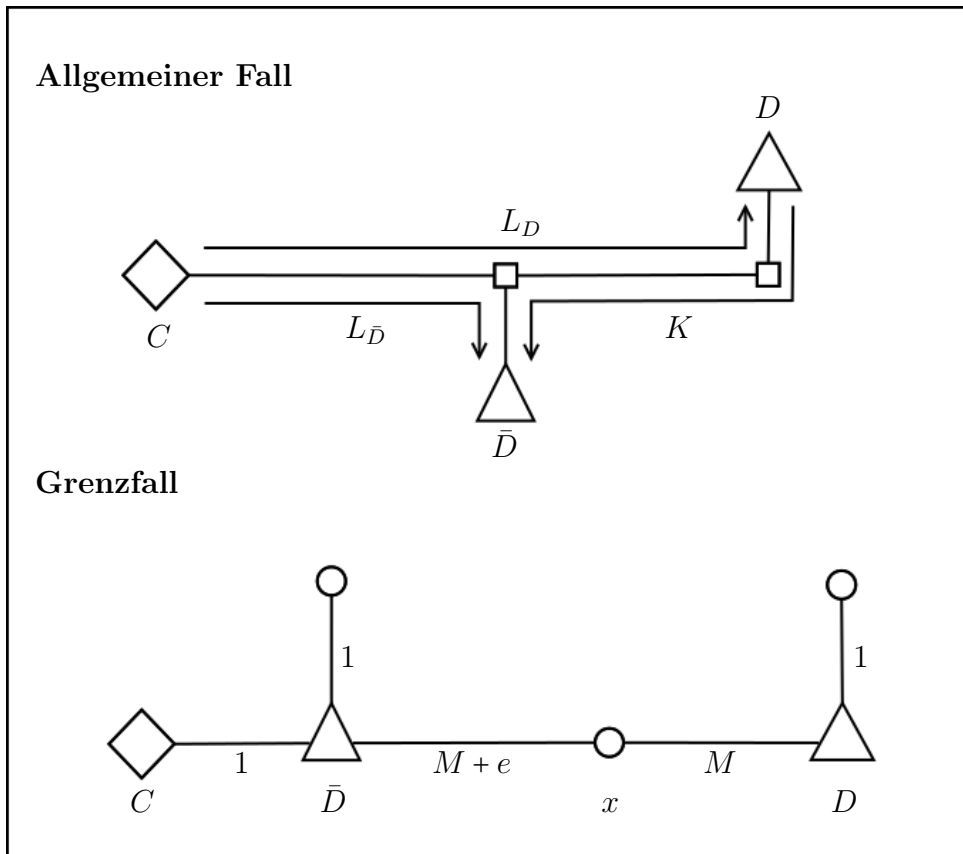


Abbildung 2.3: Veranschaulichung und Grenzfall zu Satz 2.19

Aus Korollar 2.10 folgt:

$$K \geq L_D - L_{\bar{D}} \quad (2.4)$$

Nach Annahme 2.16 gilt außerdem, dass längenabhängige Kosten der Kabel- und Rohrinstallationen zu einer Fasermenge F nur von der Summe der Faserlängen abhängt. Also sind diese Kosten für eine Fasermenge F genau $x \sum_{f \in F} l_f$ mit einem festen Kostenfaktor x . Zusätzlich sind die längenabhängigen Kosten \hat{c} aller Faserninstallationen nach Annahme 2.17 identisch.

Seien mit c^\square die Fixkosten aller Strecken- und Standortinstallationen bezeichnet und mit c_D° bzw. $c_{\bar{D}}^\circ$ die Setupkosten der Kanten des Kundennetzwerkes vor bzw. nach dem Shiften. Weiter sei F_C die Menge der von C zum DP verlaufenden Faserinstallationen. Wegen Annahme 2.8 haben alle $b \in B$ Spliterrate $\sigma_b = 1$, weswegen gilt:

$$|F_C| = \sum_{b \in B} d_b \quad (2.5)$$

Dann setzen sich die Kosten vor und nach dem Shiften wie folgt zusammen:

$$\begin{aligned} c_{\text{old}} &= c^\square + c_D + c_D^\circ + (\hat{c} + x) \sum_{b \in B} d_b \Delta_D(b) + (\hat{c} + x) \sum_{f \in F_C} L_D \\ c_{\text{new}} &= c^\square + c_{\bar{D}} + c_{\bar{D}}^\circ + (\hat{c} + x) \sum_{b \in B} d_b \Delta_{\bar{D}}(b) + (\hat{c} + x) \sum_{f \in F_C} L_{\bar{D}} \end{aligned}$$

Nach Annahme 2.2 gilt außerdem, dass die Kosten ohne Berücksichtigung der Anbindung an C vor dem Shiften geringer sind, also:

$$\begin{aligned} 0 \leq \delta &= \left(c^\square + c_{\bar{D}} + c_{\bar{D}}^\circ + (\hat{c} + x) \sum_{b \in B} d_b \Delta_{\bar{D}}(b) \right) \\ &\quad - \left(c^\square + c_D + c_D^\circ + (\hat{c} + x) \sum_{b \in B} d_b \Delta_D(b) \right) \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich:

$$c_{\text{old}} - c_{\text{new}} = (\hat{c} + x) \sum_{f \in F_C} L_D - (\hat{c} + x) \sum_{f \in F_C} L_{\bar{D}} - \delta \quad (2.6)$$

$$\stackrel{(2.4)}{\leq} (\hat{c} + x) \sum_{f \in F_C} K - \delta \quad (2.7)$$

$$\stackrel{(2.5)}{=} K (\hat{c} + x) \sum_{b \in B} d_b - \delta \quad (2.8)$$

$$\stackrel{2.18}{\leq} 2 \frac{\sum_{b \in B} d_b \Delta_{\bar{D}}(b)}{\sum_{b \in B} d_b} \left((\hat{c} + x) \sum_{b \in B} d_b \right) - \delta \quad (2.9)$$

$$= 2 \left((\hat{c} + x) \sum_{b \in B} d_b \Delta_{\bar{D}}(b) \right) - \delta \quad (2.10)$$

$$< 2 \left(c^{\square} + c_{\bar{D}} + c_{\bar{D}}^{\circ} + (\hat{c} + x) \sum_{b \in B} d_b \Delta_{\bar{D}}(b) + (\hat{c} + x) \sum_{f \in F_C} L_{\bar{D}} \right) = 2c_{\text{new}} \quad (2.11)$$

Also gilt $\frac{1}{3}c_{\text{old}} \leq c_{\text{new}}$ bzw. $c_{\text{old}} - c_{\text{new}} \leq \frac{2}{3}c_{\text{old}}$. \square

Dass die Ungleichung nicht verbessert werden kann, also asymptotisch scharf ist, zeigt das Grenzbeispiel aus Abbildung 2.3. Dabei gelte für die angegebenen Länge $M > 0$ und $e > 0$. Seine weiter D und \bar{D} derart, dass sie alle BTPs versorgen können. Außerdem existiert jeweils nur ein verlegbarer Faser-, Kabel- und Rohrtyp. Desweiteren gelten die folgenden Parameter:

- $c_D = c_{\bar{D}} = 10$
- $r_O = \infty$ für alle potenziellen Standorte O
- $\sigma_b = 1$ und $d_b = 1$ für alle BTPs b
- $c^{\square} = 10$
- $c_D^{\circ} = c_{\bar{D}}^{\circ} = 0$

Wegen der Differenz von e zwischen $\Delta_D(x)$ und $\Delta_{\bar{D}}(x)$ wird D von ZuPlaTo als DP-Standort bestimmt.

Dann gilt auf Grund der Struktur des Netzes $K = L_D - L_{\bar{D}}$, weswegen zwischen (2.6) und (2.7) Gleichheit gilt. Außerdem gilt:

$$K = 2M + e < 2M + \frac{4}{3}e + \frac{4}{3} = 2 \frac{3M + 2e + 2}{3} = 2 \frac{\sum_{b \in B} d_b \Delta_{\bar{D}}(b)}{\sum_{b \in B} d_b}$$

Für festes e und M gegen ∞ kommen die Terme links und rechts der Ungleichung verhältnismäßig beliebig nahe an Gleichheit heran, was damit wiederum auch für (2.8)

und (2.9) gilt. Ähnlich verhält es sich für (2.10) und (2.11). Es gilt:

$$\begin{aligned}
 2 \left((\hat{c} + x) \sum_{b \in B} d_b \Delta_{\bar{D}}(b) \right) - \delta &= 2(\hat{c} + x)(3M + 2e + 2) - e \\
 &< 2(\hat{c} + x)(3M + 2e + 2) + 40 + 4(\hat{c} + x) \\
 &= 2 \left(c^\square + c_{\bar{D}} + c_{\bar{D}}^\circ + (\hat{c} + x) \sum_{b \in B} d_b \Delta_{\bar{D}}(b) + (\hat{c} + x) \sum_{f \in F_C} L_{\bar{D}} \right)
 \end{aligned}$$

Wiederum kommen für festes e und M gegen ∞ die Terme links und rechts der Ungleichung verhältnismäßig beliebig nah an Gleichheit heran und damit auch die genannten Terme im Beweis. Dafür ist auch zwingend notwendig, dass die Setupkosten $c_{\bar{D}}^\circ$ null sind. Wäre dies nicht der Fall, wären die Setupkosten nach Annahme 2.7 ebenfalls von M abhängig, womit die Ungleichung nicht mehr asymptotisch scharf sein würde.

Somit gilt, dass die Differenz $c_{\text{old}} - c_{\text{new}}$ in diesem Beispiel für großes M beliebig nahe an $\frac{2}{3}c_{\text{old}}$ herankommt, die Ungleichung also asymptotisch scharf sind.

2.3 Shiftalgorithmus

Nachdem nun untersucht wurde, welches theoretische Potenzial das Verschieben von DP-Standorten besitzt, wird im Folgenden erläutert, wie die neuen Standorte ausgewählt werden. Dazu wird ein konkreter Shiftalgorithmus zu Definition 2.1 beschrieben.

Voraussetzungen Von den in Teil 2.2 getroffenen Annahmen wollen wir nur drei als gegebene Voraussetzungen übernehmen. Dabei handelt es sich um die Annahmen 2.3, 2.4 und 2.5. Dementsprechend gelten die aus diesen Annahmen und der Definition abgeleiteten Korollare 2.9 und 2.10 auch weiterhin.

Algorithmus Als Eingabeparameter erhält der Shiftalgorithmus nach Definition 2.1:

- Ein Problem P nach 1.2.4, also insbesondere ein Trassennetzwerk T
- Ein gültiges FTTx-Netz L zum Problem nach 1.2.3
- Eine Menge an zulässigen DP-Standorten

Die Menge an zulässigen DP-Standorten ist in Variante (b) des Algorithmus die Menge der potenziellen DP-Standorte in P .

Aus diesen Daten wird eine *neue Lösung* \bar{L} errechnet, mit dem Ziel der Kostenreduzierung gegenüber der gegebenen Lösung L . Dies geschieht nach Algorithmus 1.

Dabei legt die Methode `findDPLocations()` die neuen Standorte der DPs fest, die Methode `adaptFibers()` passt die Faserinstallationspfade an die neuen DP-Standorte an und

```

1 findDPLocations();
2 adaptFibers();
3 installHardware();

```

Algorithmus 1 : Shiftalgorithmus

die Methode `installHardware()` bestimmt zu den angepassten Faserinstallationspfaden passende Faser-, Kabel-, Rohr- und Standortinstallationen und richtet diese ein.

Dabei arbeitet die Methode `installHardware()` genauso wie der in Teil 1.3.1 genannte Installations-Usecase und wird nicht näher erläutert. Nach Korollar 2.10 gilt außerdem, dass ein DP-Standort die Pfade des DP zu BTPs und CO eindeutig festlegt. Da die Methode `adaptFibers()` nur diese Pfadveränderungen umsetzt, ist auch sie nicht Teil der weiteren Betrachtungen. Der Fokus liegt folglich auf der `findDPLocations()` Methode.

2.3.1 Methode `findDPLocations()`

Nach Korollar 2.9 ist das Shiften der einzelnen DPs unabhängig von den anderen DPs. Deswegen wird auch im Shift Algorithmus jeder DP-Standort einzeln in seinem Kundennetzwerk betrachtet und dementsprechend die `findDPLocations()` Methode immer für genau einen DP-Standort aufgerufen. Also beschränkt sich die weitere Betrachtung in diesem Kapitel wiederum auf einen DP D mit Kundennetzwerk N und zugehörigem CO C .

Für die Algorithmusbeschreibung werden die folgenden Funktionen benötigt:

Definition 2.20 (Nachbarschaft). *Für einen Knoten O ist die Nachbarschaft $\eta_D(O)$ als die Menge aller Knoten X definiert, für die $\{O, X\}$ eine Kante im Kundennetzwerk von D ist.*

Bemerkung. Wegen der beschränkten Betrachtung eines DP wird die Nachbarschaft in diesem Kapitel auch einfach mit $\eta(O)$ bezeichnet.

Definition 2.21 (Kosten des Shiftens). *Die Funktion $K(O, O^*)$ beschreibt die Differenz zwischen den jeweiligen Gesamtnetzkosten für das Errichten des DP am Standort O^* und am Standort O . Dabei werden die Kosten für O von den Kosten für O^* abgezogen.*

Der Wert der Kostenfunktion für O und O^* beschreibt also die Kostenverringerung, welche durch die Einrichtung des DP am Standort O im Vergleich zur Einrichtung des DP am Standort O^* erreicht wird. Dieser Wert kann auch negativ sein. Wie und in welchen Varianten die Definition der Kostenfunktion umgesetzt ist, wird im weiteren Kapitelverlauf erläutert.

```

Input : DP Standort  $D$ 
Output : Neuer Standort des DP
1 Setze aktuellen Standort des DP  $O^*$  auf  $D$  und markiere  $D$  als überprüft;
2 repeat
3   Setze Menge der möglichen Shiftstandorte  $S$  auf  $\eta(O^*)$ ;
4   Setze Menge der günstigen Shiftstandorte  $S^*$  auf  $\emptyset$ ;
5   while  $S \neq \emptyset$  do
6     Entferne  $O$  aus  $S$  und markiere  $O$  als überprüft;
7     if  $O$  ist kein möglicher DP-Standort then
8       foreach  $\bar{O}$  in  $\eta(O)$  do
9         if  $\bar{O}$  noch nicht überprüft then
10          Füge  $\bar{O}$  zu  $S$  hinzu;
11        else
12          if  $K(O, O^*) > 0$  then
13            Füge  $O$  zu  $S^*$  hinzu;
14    if  $S^* \neq \emptyset$  then
15      Wähle aus  $S^*$  einen Standort  $O$  mit  $K(O, O^*) = \max_{o \in S^*} (K(o, O^*))$ ;
16       $O^* := O$ ;
17 until  $S^* = \emptyset$ ;
18 return  $O^*$ ;

```

Algorithmus 2 : Bestimmung neuer DP-Standorte

Mit diesen Methoden lässt sich nun der Ablauf von `findDPLocations()` für jeden DP D beschreiben. Dieser Ablauf ist in Algorithmus 2 dargestellt.

Der Algorithmus sucht lokal um jeden DP-Standort nach möglichen besseren Standorten zur Errichtung des DP. Dabei gilt:

Proposition 2.22. *Algorithmus 2 terminiert.*

Beweis. Jeder Knoten in N wird maximal einmal als möglicher Shiftstandort überprüft. Da die Menge der Knoten in N endlich ist, können maximal endlich viele Standorte besser als der jeweilige aktuelle DP-Standort sein. Weil der Algorithmus genau dann endet, wenn kein günstigerer Shiftstandort zum aktuellen DP-Standort existiert, tritt dieser Zustand sicher ein. \square

Die Frage ist nun, was die Kosten $K(O, O^*)$ genau beinhalten, bzw. wie diese berechnet werden. Dies bestimmt zu einem Großteil den Verlauf und das Ergebnis der Methode `findDPLocations()`.

Im Shiftalgorithmus sind mehrere Varianten für die Berechnung dieser Kostenfunktion möglich. Zwei dieser Varianten werden nun vorgestellt.

2.4 Arten der Kostenbewertung

In diesem Abschnitt werden die folgenden beiden Varianten, die Definition 2.21 der Kostenfunktion der Methode `findDPLocations()` umzusetzen, näher erläutert:

- Die *Realkosten* Variante
- Die *Approximierte Kosten* Variante

Dabei sind für jede Variante zu einem gegebenen potenziellen Standort O und einem aktuellen DP-Standort O^* im Kundennetzwerk von D die Kosten $K(O, O^*)$ zu ermitteln.

2.4.1 Realkosten

Wie der Name schon vermuten lässt, spiegeln die Kosten bei dieser Variante *genau* die Kostenverringerung wider, welche die Errichtung des DP in O im Vergleich zur Errichtung des DP in O^* verursachen würde.

Die Vorgehensweise zur Ermittlung der Kosten für jeden der beiden DP-Standorte ähnelt dabei dem Aufbau von Algorithmus 1. Diesmal jedoch sind die neuen DP-Standorte von vornherein festgelegt, sodass die Methode `findDPLocations()` nicht ausgeführt wird. Als neuer Standort für D wird O bzw. O^* gewählt und die restlichen DPs erhalten als neuen ihren vorherigen Standort. Anschließend werden ausgehend von diesen jeweiligen Standorten zwei neue Lösungen L_O und L_{O^*} generiert, indem jeweils die Methoden `adaptFibers()` und `installHardware()` aufgerufen werden. Für diese Lösungen können nun die jeweiligen Gesamtkosten G_O und G_{O^*} berechnet werden. Dann gilt:

$$K(O, O^*) = G_{O^*} - G_O$$

2.4.2 Approximierte Kosten

Die zweite Art der Kostenberechnung für einen potenziellen Standort gibt nicht die exakten Kosten wider, sondern versucht, die durch die Standortänderung des DP entstehenden Kosten näherungsweise zu bestimmen.

Dazu wird für jede Kante e in N ein Kostenwert $\check{K}(e)$ definiert, welcher beschreibt, was das Benutzen von e an Faser-, Kabel- und Rohrinstallationskosten auf BTP-DP-Stufe verursacht. Anders gesagt beschreibt $\check{K}(e)$, welche Installationskosten gespart oder

zusätzlich anfallen würden, wenn man alle über e laufenden Installationen der BTP-DP-Stufe um e verkürzt oder verlängert. Außerdem wird für jeden potenziellen Standort O ein Kostenwert $\zeta(O)$ definiert, welcher *CO-Kosten* genannt wird. Dieser spiegelt die Kosten der Anbindung von O an C wider. Für die Berechnung von \check{K} und ζ gibt es wieder mehrere Möglichkeiten, von denen einige in Teil 2.5 beschrieben sind.

Für den Fall, dass die Kante $e = \{O, O^*\}$ in N existiert, sei K definiert als:

$$K(O, O^*) := c_{O^*} + \zeta(O^*) + \check{K}(e) \quad (2.12a)$$

$$- \left(c_O + \zeta(O) + l_e \left(\sum_{\bar{e} \in \eta(O^*) \setminus e} \frac{\check{K}(\bar{e})}{l_{\bar{e}}} \right) \right) \quad (2.12b)$$

Die Kosten in (2.12a) stellen die Ausgangssituation, also den Kostenwert für e sowie die Setupkosten und CO-Kosten in O^* da.

Die Kosten in (2.12b) wiederum symbolisieren die Kosten für eine Verschiebung des DP über e . Dabei werden alle Installationen, die auf den zu O^* inzidenten Kanten mit Ausnahme von e liegen, über e verlängert. Die Installationen werden dabei durch die Kostenwerte der Kanten repräsentiert (siehe Abbildung 2.4). Zusätzlich müssen natürlich wieder Setupkosten und CO-Kosten für O addiert werden.

Falls die Kante $\{O, O^*\}$ nicht in N existiert, existiert nach Korollar 2.10 ein Pfad π von O^* nach O aus Knoten $O^* = v_1, \dots, v_{n+1} = O$ und Kanten $\{v_1, v_2\} = e_1, \dots, e_n = \{v_n, v_{n+1}\}$. Sei $E := \{e_1, \dots, e_n\}$, dann gilt:

$$K(O, O^*) := c_{O^*} + \zeta(O^*) + \sum_{i=1}^n \check{K}(e_i) - \left(c_O + \zeta(O) + \sum_{i=1}^n \left(\left(\sum_{j=i}^n l_{e_j} \right) \cdot \sum_{\bar{e} \in \eta(v_i) \setminus E} \frac{\check{K}(\bar{e})}{l_{\bar{e}}} \right) \right) \quad (2.13)$$

Das Shiften über mehrere Kanten spiegelt dasselbe Verschiebeprinzip wider und entspricht dem aufeinanderfolgenden Ausführen von Shifts über die Kanten e_1 bis e_n .

Diese Art der Kostenberechnung hat zur Folge, dass der Algorithmus versucht, den DP über - im Sinne von \check{K} - teure Kanten zu schieben. Dabei wird eine möglichst zentrale Position im Netzwerk angestrebt, um dadurch die Gesamtlänge an Installationen und somit die Kosten der Anbindung des BTP an den DP zu verringern.

2.4.3 Vergleich der Kostenvarianten

Die Realkostenberechnung ist die genauere, aber auch bei weitem laufzeitaufwendigere Methode, die Kosten zu ermitteln (vgl. die Laufzeiten in Kapitel 4). Zwar wird exakt

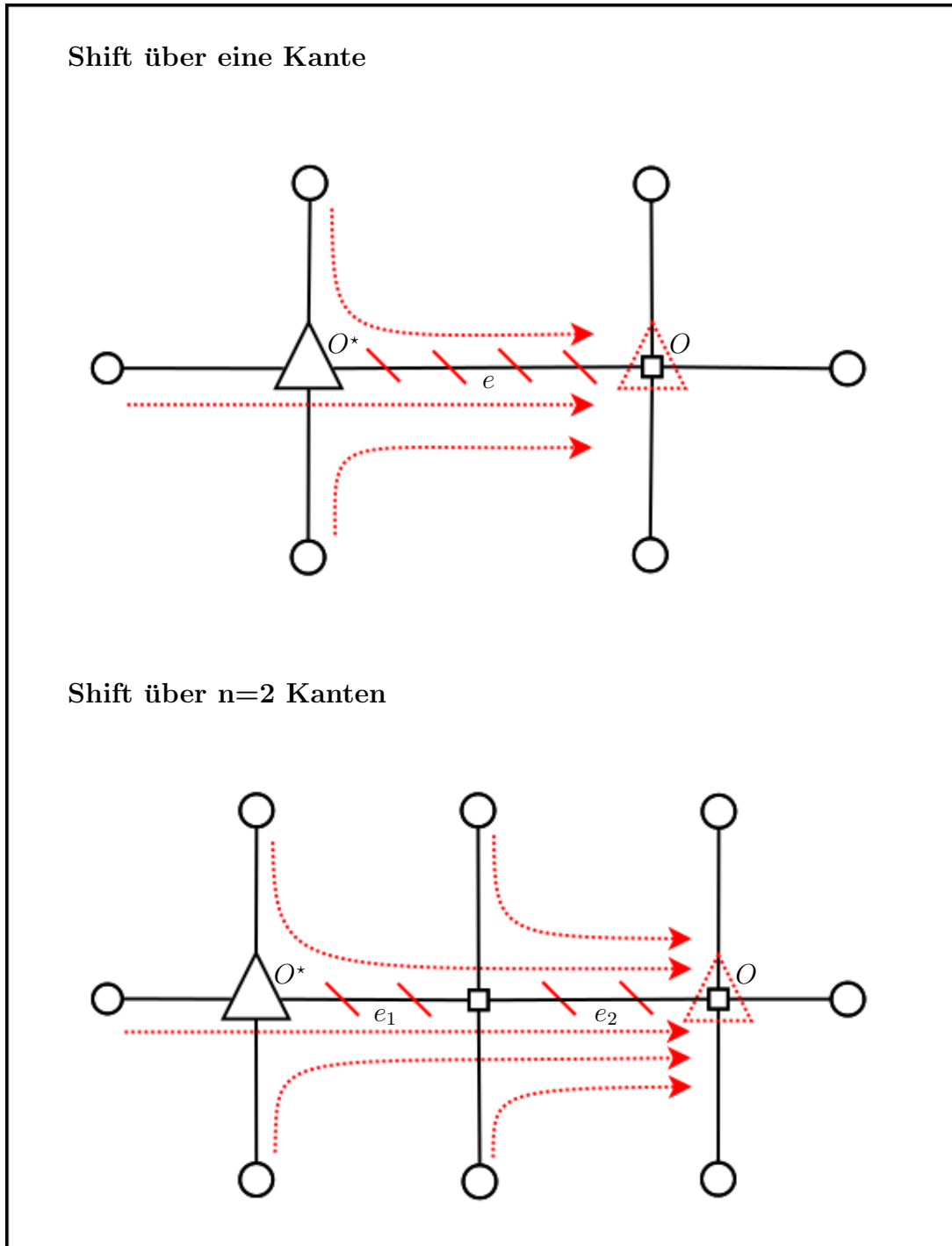


Abbildung 2.4: Interpretation der approximierten Kosten

die sich ergebende Kostendifferenz für die Standorte O und O^* bestimmt, jedoch wird dafür jeweils zweimal die Methode `adaptFibers()` und `installHardware()` ausgeführt. Da `installHardware()` die Ausführung des kompletten Installations-Usecases aus dem Lösungsprozess von ZuPlaTo beinhaltet, ist vor allem diese Methode extrem laufzeitintensiv.

Die approximierten Kostenberechnung geht von gleichbleibenden Installationen beim Verschieben des DP aus (siehe Gleichung (2.13) bzw. Abbildung 2.4). Jedoch ist dies nur bei den explizit festlegbaren Faserinstallationen der Fall. Ob für einen neuen Standort mit angepassten Faserinstallationen in der `installHardware()` Methode des Shiftalgorithmus wirklich bis auf Verlängerungen bzw. Verkürzungen dieselben Kabel- und Rohrinstallationen verlegt werden oder ob andere Kombinationen günstiger werden, ist unklar. Deswegen müssen die Kosten keinesfalls lineare Veränderungen aufweisen, was bei der approximierten Kostenberechnung jedoch angenommen wird und damit ungenau ist.

Somit hat die Realkostenberechnung durchaus ihre Berechtigung. Sie wird jedoch wegen der enormen Laufzeiten vor allem zur Überprüfung der Genauigkeit der approximierten Kostenvariante genutzt.

2.5 Kostenwertberechnung

Die Wirksamkeit der DP-Standortberechnung mit approximierten Kosten hängt entscheidend von den benötigten Kostenwerten \check{K} sowie den CO-Kosten ζ ab, deren Berechnung in diesem Teil beschrieben wird. Sie werden aus der gegebenen Lösung L extrahiert, genauer von den Kosten der verlegten Installationen. Zur Berechnung der Kostenwerte werden wieder zwei Varianten vorgestellt, die sich in der Verrechnung der Kabel- und Rohrinstallationen unterscheiden.

2.5.1 Kabel und Rohrbewertung Variante I

Zuerst werden die Kostenwerte \check{K} je Kante ermittelt. Während sich die Faserinstallationskosten gut den Kanten zuordnen lassen, gestaltet sich die Umlegung der Kabel- und Rohrinstallationen auf die Kanten etwas schwieriger, da diese Installationen nicht stufengebunden sind. In dieser Variante I werden die Kabel- und Rohrkosten trotzdem ähnlich zu den Faserinstallationen auf die Kanten umgelegt.

Sei dazu F die Menge aller Faserinstallationen auf BTP-DP-Stufe in L und E die Menge aller Kanten im Trassennetz T sowie I die Menge aller Kabel- und Rohrinstallationen in

L. Dann werden die Kostenwerte wie folgt berechnet:

$$\forall_{e \in E} : \check{K}(e) := l_e \left(\sum_{f \in F: e \in \pi_f} \hat{c}_f + \sum_{i \in I: e \in \pi_i} \hat{c}_i \right) \quad (2.14)$$

Nun müssen noch die CO-Kosten $\zeta(O)$ für jeden potenziellen Standort O in N berechnet werden. Dafür wird zuerst ein längenabhängiger Kostenfaktor für die Anbindung von D an C ermittelt, die sogenannten *CO-Kosten pro Meter* $\hat{\zeta}$. Dieser besteht aus Faser-, Kabel- und Rohrinstallationsanteilen. Die Anteile der Kabel und Rohre werden auf Grund der Zuordnungsproblematik wieder kantenweise ermittelt.

Seien dafür F die Menge an Faserinstallationen von C zu D und I wieder die Menge aller Kabel- und Rohrinstallationen. Weiterhin sei π der Pfad von C nach D , dann gilt:

$$\hat{\zeta} = \sum_{f \in F} \hat{c}_f + \frac{\sum_{e \in \pi} l_e \sum_{i \in I: e \in \pi_i} \hat{c}_i}{\sum_{e \in \pi} l_e} \quad (2.15)$$

Mit den errechneten CO-Kosten pro Meter $\hat{\zeta}$ können nun die CO-Kosten ermittelt werden. Dazu wird für jeden potenziellen Standort O in N ein Abstand zum CO ermittelt. Dieser wird dann mit $\hat{\zeta}$ multipliziert, um die CO-Kosten zu erhalten.

Sei dazu O_1 der erste Knoten in N , der von π erreicht wird. Der Abstand zu C wird dann ab O_1 zu allen Standorten O in N gemessen, da außerhalb von N der Pfad für alle O gleich verläuft. Nach Korollar 2.10 existiert der Pfad von O_1 zu allen O in N und ist eindeutig. Deswegen kann die entsprechende Länge dieses Pfades zum Beispiel über eine Breitensuche (vgl. Kapitel 3.3 [Jun94]) ermittelt werden. Damit sind die CO-Kosten ζ für Variante I bestimmt.

2.5.2 Kabel und Rohrbewertung Variante II

Die zweite Variante zur Berechnung von Kostenwerten und CO-Kosten folgt vom Berechnungsablauf her Variante I. Der Unterschied liegt in der Bewertung von Kabel- und Rohrinstallationen.

In dieser Variante werden Kostenfaktoren errechnet, die, abhängig von der Stufe, einer Fasermenge die Kosten für dazugehörige Kabel- und Rohrinstallationen zuordnen. Die Faktoren lauten ϕ_B für die BTP-DP-Stufe und ϕ_C für die DP-CO-Stufe sowie ϕ als stufenübergreifender Faktor.

Zur Berechnung der Faktoren werden zunächst zwei Kantenmengen E_C , E_B erstellt. Eine Kante wird dabei

- der Menge E_B zugeordnet, falls über sie nur BTP-DP-Faserinstallationen verlaufen.
- der Menge E_C zugeordnet, falls über sie nur DP-CO-Faserinstallationen verlaufen.

Sei dann I_B die Menge aller Kabel- und Rohrinstallationen, die über Kanten in E_B verlaufen, I_C die Menge aller Kabel- und Rohrinstallationen, die über Kanten in E_C verlaufen und I die Menge *aller* Kabel- und Rohrinstallationen. Sei weiterhin F_e die Anzahl aller Faserinstallationen, die über $e \in E$ läuft. Dann ergeben sich die Kostenfaktoren wie folgt:

$$\begin{aligned}\phi_B &= \frac{\sum_{e \in E_B} l_e \sum_{i \in I_B} \hat{c}_i}{\sum_{e \in E_B} l_e F_e} \\ \phi_C &= \frac{\sum_{e \in E_C} l_e \sum_{i \in I_C} \hat{c}_i}{\sum_{e \in E_C} l_e F_e} \\ \phi &= \frac{\sum_{e \in E} l_e \sum_{i \in I} \hat{c}_i}{\sum_{e \in E} l_e F_e}\end{aligned}$$

Die Idee der Berechnung ist, dass Kabel- und Rohrinstallationen auf Kanten, über die nur Faserinstallationen einer Stufe verlaufen, auf diesen Kanten dieser Stufe zugeordnet werden können. Ist die Menge E_B oder E_C leer, wird ϕ_B bzw. ϕ_C mit ϕ belegt, welches den Kostenfaktor über alle Kanten darstellt.

Die eigentliche Berechnung der Kostenwerte \check{K} erfolgt dann in Anlehnung an Gleichung (2.14) aus Variante I:

$$\forall_{e \in E} : \check{K}(e) := l_e \sum_{f \in F: e \in \pi_f} (\hat{c}_f + \phi_B)$$

Damit sind bereits die Kabel- und Rohrkosten in die Berechnung mit eingeflossen.

Die CO-Kosten berechnen sich ebenfalls nach einem ähnlichen Prinzip wie in Variante I. Erst werden die CO-Kosten pro Meter $\hat{\zeta}$ in Anlehnung an Gleichung (2.15) berechnet:

$$\hat{\zeta} = \sum_{f \in F} (\hat{c}_f + \phi_C) \tag{2.16}$$

Auch hier sind über ϕ_C bereits die Kabel- und Rohrkosten mit berücksichtigt.

Die abschließende Berechnung der CO-Kosten aus $\hat{\zeta}$ ist dann dieselbe wie in Variante I.

2.5.3 Vergleich der Kostenwertvarianten

Die Variante I der Kostenwertberechnung hat den Vorteil, dass die Kosten einer Kante e direkt von den wirklich in L über e verlaufenden Installationen abhängen. Somit werden eventuelle lokale Gegebenheiten in P , die teure Installationen erfordern, erkannt und berücksichtigt.

Jedoch kann es bei der Berechnung der Kabel- und Rohrkostenanteile erhebliche Ungenauigkeiten geben, da hierbei *alle* auf einer Kante liegenden Kabel- und Rohrinstallationen

mit in die Berechnung einfließen. Wenn nun eine Kante im Kundennetzwerk zufällig auch Teil einer großen Menge von DP-CO-Faserinstallationen ist, werden auch diesen Fasern zugeordnete Kabel und Rohre Kosten für die Kante verursachen. Damit werden solche Kanten im Vergleich zu anderen Kanten in N unverhältnismäßig teuer und verleiten den Shiftalgorithmus dazu, bevorzugt über diese Kanten zu verschieben.

Deswegen hängen in Variante II die Kabel- und Rohrkosten nicht von den verlegten Kabeln und Rohren ab, sondern nur von den Faserinstallationen. Somit wird das Problem der Berücksichtigung von nicht zum Kundennetzwerk gehörenden Kabeln und Rohren behoben.

Jedoch geschieht dies durch einheitliche Kostenfaktoren für die Kabel- und Rohrkosten je Stufe. So werden lokale Gegebenheiten nicht mehr berücksichtigt, es gibt keine unterschiedlichen Kosten für unterschiedliche Kabel- und Rohrtypen und der Bündlungseffekt (siehe 1.1.3) wird vernachlässigt, da jede Faser genau die gleichen Kabel- und Rohrkosten verursacht, egal ob sie alleine auf der Kante liegt oder in einem großen Bündel.

Wie sich diese theoretischen Unterschiede in den konkreten Berechnungen auswirken, wird in Kapitel 4 erläutert.

Kapitel 3

Kreisentfernung

Der Shiftalgorithmus verlangt als Voraussetzungen die beiden Annahmen 2.3 und 2.4. Die Ausgangslösungen der Netze, mit welchen der Shiftalgorithmus arbeitet, können jedoch auf Grund der Größe der Netze nicht immer in annehmbarer Zeit optimal bestimmt werden. Da die Setupkosten einzelner Kanten oder die längenabhängigen Kosten einzelner Installationen multipliziert mit der Länge einer Kante im Vergleich zu den Gesamtkosten eines Netzes sehr gering sein können, kann es durchaus dazu kommen, dass Kundennetzwerke keine Baumstruktur besitzen. Wegen dieses Zusammenhangs mit den Gesamtnetzkosten treten Kundennetzwerke ohne Baumstruktur auch eher in vergleichsweise großen Netzen auf (vgl. Kapitel 4).

Auch kann es zu Ausgangslösungen kommen, in denen eine DP-CO-Verbindung über noch nicht eröffnete Kanten läuft, obwohl es einen alternativen Pfad über Kundennetzwerkanten des DP gibt, also auch Annahme 2.4 nicht gilt. Eine Benutzung dieser Kanten der Kundennetzwerke würde weniger Setupkosten verursachen, weswegen bereits im DP-Usecase mögliche Pfade zum CO in die Berechnung miteinbezogen werden (siehe 1.3.1). Jedoch können die dort bestimmten Pfade im weiteren Verlauf von ZuPlaTo noch verschobene werden, was auf Grund der oft geringen Kostendifferenzen im Vergleich zu den Gesamtkosten auch häufig passiert.

Deswegen wird ein Algorithmus benötigt, welcher die beiden Annahmen als Vorbereitung für den Shiftalgorithmus herstellt und die offensichtlichen Verbesserungspotenziale ausschöpft. Dieser wird im folgenden Kapitel erläutert.

3.1 Was sind Kreise?

Wir wollen zunächst zwei Arten von Kreisen einführen, welche mit den beiden Annahmen verbunden sind.

Definition 3.1 (Kundennetzwerkkreis). Sei D ein DP mit Kundennetzwerk N . Sei K ein Kreis in N , also ein Pfad aus Kanten in N mit gleichem Start- und Endknoten, dann heißt K Kundennetzwerkkreis.

Definition 3.2 (DP-CO-Kreis). Sei D ein DP mit Kundennetzwerk N und zugehörigem CO C . Sei außerdem π der Pfad von C nach D und seien S_1 und S_2 zwei verschiedene Knoten in N , über die π verläuft. Falls π zwischen S_1 und S_2 nur über Kanten außerhalb von N verläuft, bilden diese Kanten zusammen mit einem Pfad in N zwischen S_1 und S_2 einen Kreis. Dieser Kreis heißt DP-CO-Kreis.

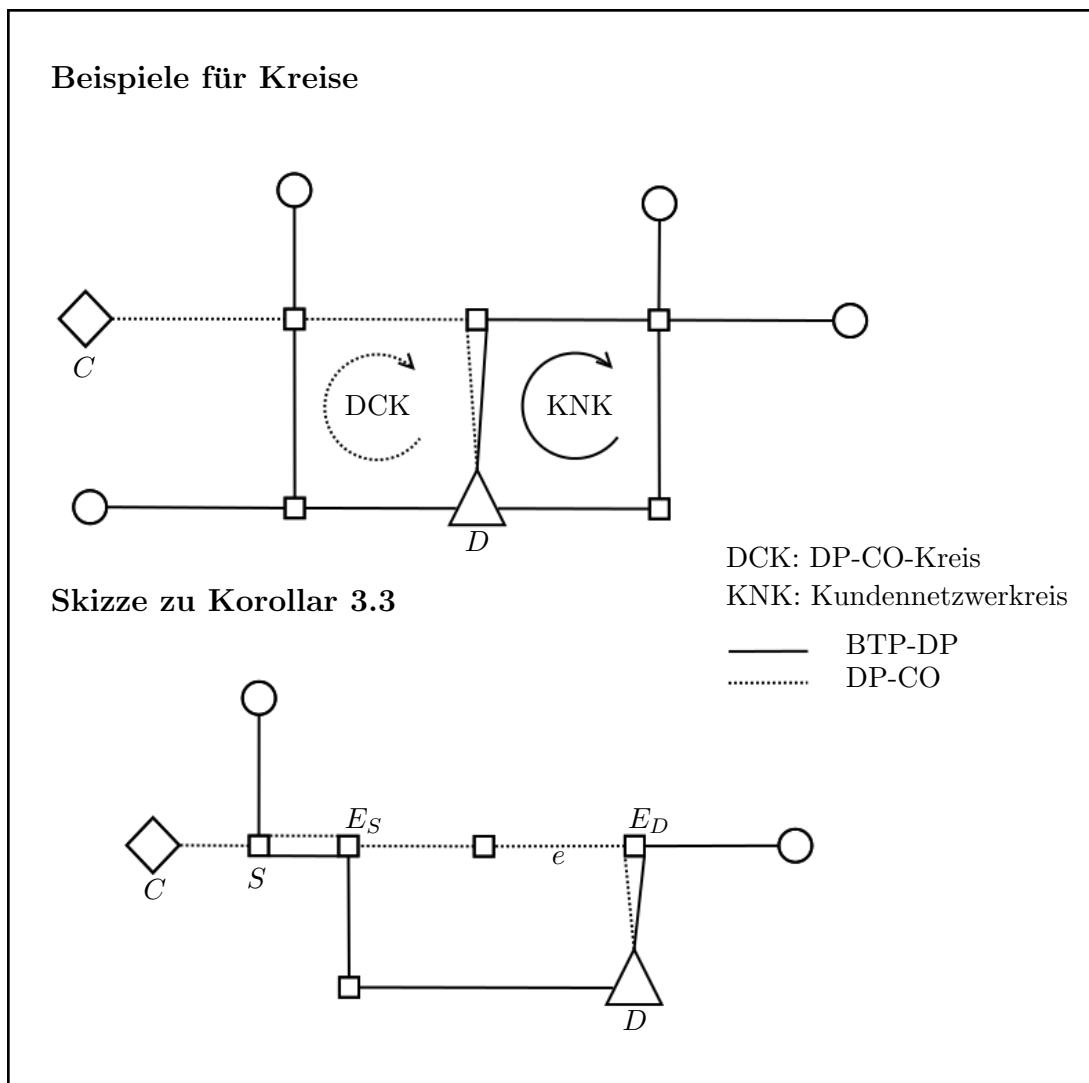


Abbildung 3.1: Veranschaulichung der Kreistypen und Korollar 3.3

Daraus folgt direkt:

Korollar 3.3. *Eine Lösung L genügt*

- (1) *Annahme 2.3 genau dann, wenn keine Kundennetzwerkzeuge in L existieren.*
- (2) *Annahme 2.4 genau dann, wenn keine DP-CO-Kreise in L existieren.*

Beweis. zu (1): „ \Rightarrow “ Gilt Annahme 2.3 ist jedes Kundennetzwerk eines DP ein Baum. Da ein Baum kreisfrei ist, existieren keine Kundennetzwerkzeuge.

„ \Leftarrow “ Wenn keine Kundennetzwerkzeuge existieren, ist jedes Kundennetzwerk kreisfrei. Nach Korollar 1.11 ist N zusammenhängend. Somit ist N ein Baum.

zu (2): „ \Rightarrow “ Gilt Annahme 2.4, so verläuft für einen DP D mit Kundennetzwerk N und zugehörigem CO C der Pfad von C nach D ab dem ersten Knoten S des Pfades, der in N liegt, nur noch über Kanten aus N . Deswegen existieren keine zwei Knoten in N , über die der Pfad verläuft und zwischen denen er nur über Kanten außerhalb von N verläuft und damit auch keine DP-CO-Kreise.

„ \Leftarrow “ Sei D ein DP mit Kundennetzwerk N und zugehörigem CO C . Angenommen Annahme 2.4 gilt nicht. Sei dann S der erste Knoten aus N , der von C aus gesehen auf π liegt, und sei e eine Kante auf π zwischen S und D , die nicht in N liegt. Sei weiter E_D der Knoten auf dem von e nach D verlaufenden Teilpfad von π , der als erstes in N liegt. Äquivalent dazu sei E_S der Knoten auf dem von e nach S verlaufenden Teilpfad von π , der als erstes in N liegt. Dann sind E_S und E_D zwei Knoten aus N in π , zwischen denen nur Kanten außerhalb von N verlaufen. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass keine DP-CO-Kreise existieren, da N nach Korollar 1.11 zusammenhängend ist und somit ein Pfad in N zwischen E_D und E_S existiert. Also liegen alle Kanten auf π zwischen S und D in N □

Also genügt der nachfolgend definierte Algorithmus unseren Anforderungen:

Definition 3.4 (Kreisentfernung). *Die Kreisentfernungsmethode ist ein Postoptimierungsalgorithmus. Als Eingabeparameter sind ihr gegeben:*

- *Eine Probleminstanz P (nach 1.2).*
- *Ein gültiges FTTx-Netz L zur Instanz P (nach 1.2.3).*

Aus diesen errechnet die Methode eine gültige Lösung \bar{L} von P mit den Eigenschaften:

- *\bar{L} besitzt dieselben CO-, DP- und BTP-Standorte wie L , die auch auf dieselbe Art und Weise einander zugeordnet sind.*
- *In \bar{L} existieren weder Kundennetzwerkzeuge noch DP-CO-Kreise.*
- *Die Faserinstallationen in \bar{L} sind dieselben wie in L mit denselben Start- und Endstandorten. Sie verlaufen zwischen diesen Standorten höchstens über andere Pfade und haben dementsprechende Längen.*

3.2 Verbesserungspotenzial der Kreisentfernung

Neben der Herstellung der Voraussetzungen für den Shiftalgorithmus verringert die Kreisentfernung in den meisten Fällen auch die Kosten des Netzes. Die Dimensionen dieser Verringerung sollen nun untersucht werden. Dabei wird wie in Kapitel 2 angenommen, dass keine Kundennetzwerküberschneidungen existieren (Annahme 2.5). Weiter sei für den folgenden Abschnitt D ein DP mit Kundennetzwerk N und CO C , sowie π der Pfad von C nach D .

3.2.1 Potenzial der Kundennetzwerkzeuge

Proposition 3.5. *Die Entfernung von Kundennetzwerkzeugen verlängert keine Installationen. Weiterhin gilt, dass mindestens die Setupkosten der billigsten Kante in einem Kundennetzwerkzeug gespart werden und maximal die Setupkosten aller anderen Kanten.*

Beweis. Wenn ein Kundennetzwerkzeug existiert, so existieren mindestens zwei Faserinstallationspfade, die einen Knoten S in N über ihre jeweiligen Teilpfade erreichen und diese Teilpfade sich in mindestens einer Kante unterscheiden. Entweder einer dieser Teilpfade ist echt kürzer als einige andere oder alle sind genau gleich lang. Also würde eine Verlegung aller Installationen von D bis S über einen kürzesten Teilpfad die Längen der Installationen maximal verkürzen.

Da man dieses Vorgehen für alle Kundennetzwerkzeuge durchführen kann, ist es möglich Kundennetzwerkzeuge zu entfernen, ohne Installationen zu verlängern.

Zusätzlich wird mindestens eine Kante im Kreis geschlossen, also werden mindestens die Setupkosten der Kante mit den niedrigsten Setupkosten gespart.

Auf der anderen Seite könnte für ein Kundennetzwerkzeug der kürzeste Pfad zu S nur eine Kreiskante benutzen, wobei die restlichen Kreiskanten gespart werden würden. Es gilt demnach, dass mindestens die Setupkosten der billigsten Kante im Kreis erhalten bleiben, also maximal die Setupkosten aller anderen Kreiskanten entfallen könnten. \square

Die durch Verkürzungen von Installationen möglichen Einsparungen hängen von den in der ursprünglichen Lösung gewählten Pfaden ab. Deswegen sind diese Einsparungen nach oben durch die Abweichung der IP Lösung des DP-Usecases vom dazugehörigen Optimum, also den entsprechenden Gap, beschränkt.

Zusätzlich zu den aufgezeigten Potenzialen ist auch immer eine Verringerung der Installationskosten auf Grund des Zusammenlegens von Installationspfaden möglich (siehe 1.1.3). Dieser ist jedoch je nach Komponententypen und -eigenschaften verschieden stark ausgeprägt und wird deswegen hier nicht weiter untersucht.

3.2.2 Potenzial der DP-CO-Kreise

Um das Potenzial der DP-CO-Kreise entfernt zu untersuchen zu können, benötigen wir zuerst eine Annahme über die Entstehung von DP-CO-Kreisen.

Annahme 3.6. Seien S_1 und S_2 zwei Knoten in N , welche auf π liegen und einen DP-CO-Kreis bilden. Dann ist die Verbindung von S_1 und S_2 über π kürzer als die Verbindung zwischen den Knoten in N .

Die Annahme begründet sich in der Wahl von π im CO-Usecase von ZuPlaTo. Wenn dort das Teilstück außerhalb des Kundennetzwerkes gewählt wird, obwohl ein Alternativpfad über ein Kundennetzwerk verläuft und damit günstiger bewertet gewesen ist, muss das Teilstück außerhalb des Netzes kürzer sein als das entsprechende innerhalb.

Außerdem gelte:

Annahme 3.7. Das DP-Netzwerk (siehe Definition 1.10) jedes COs ist ein Baum.

Annahme 3.8. Die DP-Netzwerke zweier COs überschneiden sich nicht, teilen also weder Knoten noch Kanten.

Ähnlich denselben Annahmen (2.3 & 2.5) für Kundennetzwerke von DPs läge offensichtliches Verbesserungspotenzial vor, wären die Annahmen nicht erfüllt. Da jedoch das im CO-Usecase zu lösende IP meist vergleichsweise geringe Komplexität besitzt, wird dieses oft optimal gelöst, womit die Annahmen auch in der Realität oft gelten.

Als letztes gelte die in Kapitel 2 eingeführte Annahme 2.7, nach der Setupkosten einer Kante proportional zu ihrer Länge sind.

Allgemein werden DP-CO-Kreise entfernt, indem das Teilstück von π zwischen S_1 und S_2 , im weiteren Verlauf mit $\bar{\pi}$ bezeichnet, durch den entsprechenden Pfad π^* in N zwischen diesen Knoten ersetzt wird (siehe Abbildung 3.2). Dies ist sowohl für die Verbindung zwischen C und D der Fall als auch für alle anderen Faserinstallationen auf DP-CO-Stufe, deren Pfade $\bar{\pi}$ komplett enthalten.

Daraus folgt:

Proposition 3.9. *Durch die Entfernung von DP-CO-Kreisen wird mindestens eine Kante geschlossen. Außerdem werden die Installationen, welche über $\bar{\pi}$ verlaufen, sicher verlängert, sodass es zu einer Kostenerhöhung kommen kann. Weiterhin gilt, dass bestenfalls die Hälfte der Gesamtsetupkosten durch die Entfernung von DP-CO-Kreisen gespart werden kann.*

Beweis. Das Faserinstallationen aus anderen Kundennetzwerken $\bar{\pi}$ komplett oder teilweise enthalten, kann auf Grund von Annahme 2.5 ausgeschlossen werden. Jedoch können durchaus Installationen auf DP-CO-Stufe existieren, deren Pfade nur ein Teilstück von $\bar{\pi}$ nutzen, weswegen durch das Ersetzen von $\bar{\pi}$ nicht notwendigerweise alle dazugehörigen

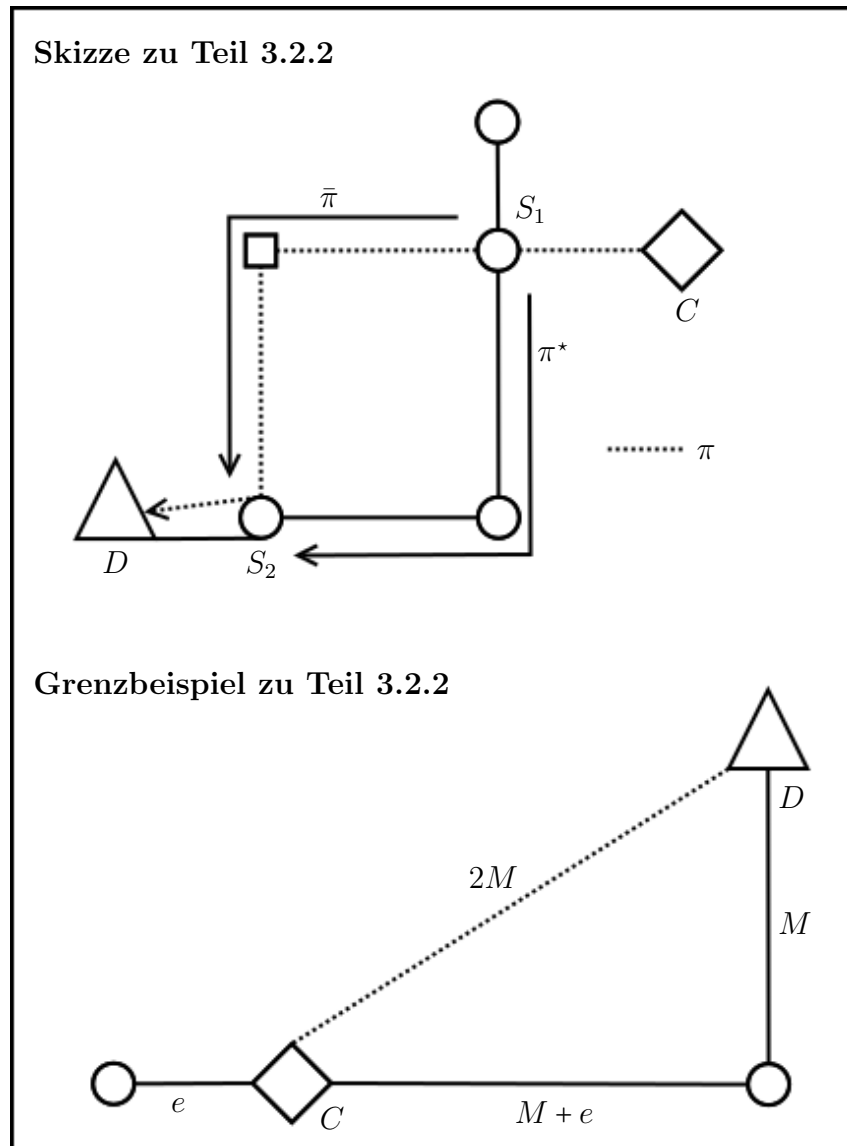


Abbildung 3.2: Veranschaulichung und Grenzbeispiel für DP-CO-Kreise

Kanten geschlossen werden. Infolge der Annahmen 3.7 und 3.8 wird aber mindestens eine Kante von $\bar{\pi}$ geschlossen.

Weiterhin gilt nach Annahme 3.6, dass die Umlegung der Installationen diese sicher verlängert. So kann es vorkommen, dass diese Verlängerungskosten den Vorteil der gesparten Setupkosten übertreffen.

Auf der anderen Seite ist die Verbesserungsmöglichkeit durch das Entfernen der DP-CO-Kreise nach oben beschränkt. Bestenfalls können alle Kanten von $\bar{\pi}$ geschlossen werden. Da aber zum einen nach Annahme 3.6 die Länge von $\bar{\pi}$ durch die von π^* beschränkt ist und zum anderen nach Annahme 2.7 dasselbe auch für die entsprechenden Setupkosten gilt, können nicht mehr als die Hälfte der Gesamtsetupkosten gespart werden. \square

Ein Grenzbeispiel, welches die obere Grenze der gesparten Setupkosten asymptotisch belegt, ist in Abbildung 3.2 gezeigt. Dabei wird die Annahme 3.6 eingehalten, wodurch die Pfade so verlaufen wie abgebildet. Sei α der Setupkostenfaktor nach Annahme 2.7. Dann liegen die Setupkosten vor dem Entfernen bei $\alpha(4M + 2e)$. Durch das Entfernen sinken die Kosten auf $\alpha(2M + 2e)$. Für M gegen ∞ und festes e kommt das Verhältnis der Setupkosten vor und nach dem Entfernen beliebig dicht an 2 heran und die Installationen verlängern sich nur um e .

Abschließend sei erwähnt, dass auch bei dieser Kreisentfernung gilt, dass Installationen gebündelt und somit Kosten gespart werden (siehe 1.1.3).

3.3 Kreisentfernungsalgorithmus

Nachdem nun beschrieben ist, welchen Nutzen und welches Potenzial die Kreisentfernung hat, wird im Folgenden ein konkreter Algorithmus zur Kreisentfernung nach Definition 3.4 beschrieben. Die einzige aus Kapitel 2 übernommene Annahme ist dabei, dass sich Kundennetzwerke nicht überschneiden (Annahme 2.5). Außerdem werden die Annahmen 3.7 und 3.8 aus dem vorherigen Abschnitt übernommen.

Nach Definition 3.4 sind der Kreisentfernungsmethode, im weiteren Verlauf abkürzend mit KEM bezeichnet, die folgenden Parameter gegeben:

- Eine Problem Instanz P nach 1.2.4, also insbesondere ein Trassennetzwerk T
- Ein gültiges FTTx-Netz L zur Instanz P nach 1.2.3

Mit diesen Parametern wird nun die KEM aufgerufen, mit dem Ziel, sowohl Kundennetzwerk- als auch DP-CO-Kreise zu entfernen. Um dies zu erreichen führt sie den Algorithmus 3 aus.

Dabei entfernt die Methode `deleteSubnetworkCycle()` Kundennetzwerkkreise, indem sie Pfade von BTP-DP-Faserinstallationen verändert. Die Methode `deleteDPCOCycle()`

```

1 deleteSubnetworkCycle();
2 deleteDPCOCycle();
3 installHardware();

```

Algorithmus 3 : Kreisentfernungsalgorithmus

arbeitet vom Ergebnis her äquivalent zur ersten Methode für DP-CO-Kreise. Es werden diesmal jedoch Pfade von Faserinstallationen auf DP-CO-Stufe verändert. Dabei bleiben in beiden Methoden die Start- und Endstandorte dieselben.

Die Reihenfolge des Aufrufes ist hier von Bedeutung, da bei der Entfernung von Kundennetzwerk-Kreisen DP-CO-Kreise entstehen können. Dies ist der Fall, wenn durch das Entfernen von Kanten aus dem Kundennetzwerk die darüberlaufenden DP-CO-Verbindung nun auf dieser Kante außerhalb des Kundennetzwerkes verläuft.

Nach der Entfernung der Kreise wird abschließend die `installHardware()` Methode aus dem Shiftalgorithmus aufgerufen (vgl. Teil 2.3), um aus den Faserinstallationen eine gültige Lösung zu generieren.

In den nächsten zwei Abschnitten wird nun die Funktionsweise der ersten beiden Methoden erläutert.

3.3.1 Die Methode `deleteSubnetworkCycle()`

Die Methode hat die Aufgabe das Kundennetzwerk jedes DP in L kreisfrei und damit zu einem Baum zu machen. Da die Kreisentfernung nach Annahme 2.5 für jeden DP unabhängig von den anderen Kundennetzwerken ist, wird sie je DP ausgeführt.

Sei $\chi(S, e)$ der von Knoten S über Kante e erreichte Knoten. Dann wird für jeden DP der Algorithmus 4 ausgeführt.

Die Korrektheit des Algorithmus lässt sich mit Hilfe der folgende Invariante beweisen:

Lemma 3.10. *Vor und nach jedem Durchlaufen der Schleife in Zeile 3 sei*

- $F^* \subseteq F$ die Menge aller Faserinstallationen, die zu diesem Zeitpunkt schon durch die Schleife gelaufen sind.
- B der Teilgraph von N , der von den Kanten der Pfade $\pi_D(S)$ zu Knoten S mit $\pi_D(S) \neq \emptyset$ gebildet wird.
- B^* der Teilgraph von N , der von den Kanten der Pfade π_f zu Faserinstallationen in F^* gebildet wird.

Dann gilt zu diesem Zeitpunkt:

- (a) $B = B^*$
- (b) B ist ein Baum

Input : DP Standort D ; Kundennetzwerk N des DP; Menge F aller Faserinstallationen von D zu jedem BTP in N

Output : /

```

1 foreach Knoten  $x$  in  $N$  do
2   | Setze den Pfad von  $D$  zu  $x$   $\pi_D(x) := \emptyset$ ;
3 foreach  $f$  in  $F$  do
4   | Setze Pfadknoten  $K$  auf  $D$ ;
5   | Setze aktuellen Pfad  $\tilde{\pi}$  von  $D$  nach  $K$  auf  $\emptyset$ ;
6   | Setze Menge  $M$  der durch  $f$  neu erreichten Knoten auf  $\emptyset$ ;
7   | foreach Kante  $e$  in  $\pi_f$  do
8     |  $K := \chi(K, e)$ ;
9     |  $\tilde{\pi} := \tilde{\pi} \cup \{e\}$ ;
10    | if  $\pi_D(K) = \emptyset$  then
11      |  $\pi_D(K) := \tilde{\pi}$ ;
12      |  $M := M \cup \{K\}$ ;
13    | else
14      | if  $\pi_D(K) \neq \tilde{\pi}$  then
15        |  $\tilde{\pi} := \pi_D(K)$ ;
16        | foreach  $S$  in  $M$  do
17          |  $\pi_D(S) := \emptyset$ ;
18    |  $\pi_f := \tilde{\pi}$ ;
19    |  $l_f := \sum_{e \in \pi_f} l_e$ ;
    
```

Algorithmus 4 : Aufbau eines kreisfreien Kundennetzwerkes

(c) Für alle Knoten S in B ist $\pi_D(S) \neq \emptyset$

Beweis. Vor dem ersten Durchlauf der Schleife ist B leer, da $\pi_D(x) = \emptyset$ für alle x in N gilt. Auch ist F^* leer und damit auch B^* . Damit folgt $B = B^*$. Außerdem ist B kreisfrei und zusammenhängend, also ein Baum. Da B keine Knoten enthält, gilt auch (c). Also gelten (a), (b) und (c) vor dem ersten Durchlauf.

Angenommen (a), (b) und (c) gelten vor einem Durchlauf. Dann ist zu zeigen, dass die Aussagen auch nach dem nächsten Durchlauf gelten.

Sei f die Faserinstallation des Durchlaufes. Vor und nach jedem Durchlauf der Schleife aus Zeile 7 ist

- (A) $B = \bar{B}$, wobei \bar{B} der Teilgraph von N ist, der von den Kanten von Pfad $\tilde{\pi}$ und Kanten der Pfade π_f zu Faserinstallationen f in F^* gebildet wird.
- (B) für alle Knoten S in $\tilde{\pi}$ der neue Pfad $\pi_D(S) \neq \emptyset$.

Vor dem ersten Durchlauf gilt $\bar{B} = B^*$ und damit nach (a) auch (A). Außerdem ist $\tilde{\pi}$ leer, also gilt (B). Sei K wie im Algorithmus definiert, dann ergeben sich folgende Fälle:

Fall I: $\pi_D(K) = \emptyset$

Es folgt $\pi_D(K) := \tilde{\pi}$ und damit (A) und (B)

Fall II: $\pi_D(K) \neq \emptyset$

a): $\pi_D(K) = \tilde{\pi} \Rightarrow$ (A) und (B)

b): $\pi_D(K) \neq \tilde{\pi} \Rightarrow \tilde{\pi} := \pi_D(K)$

Außerdem wird die Menge aller π_D auf den Zustand vor dem Schleifendurchlauf gesetzt, wo $B = \bar{B}$ galt (vgl. Zeilen 16 bis 17) Damit ist auch jetzt $B = \bar{B}$. Außerdem galt vor dem Durchlauf (c). Da $\tilde{\pi}$ nun nur über Knoten läuft, die vor dem Durchlauf in B lagen, gilt (B).

Also gelten (A) und (B) am Ende aller Durchläufe der Schleife aus Zeile 7. Mit Zeile 18 ergibt sich dann $B^* = \bar{B} = B$, also gilt sowohl (a) also auch (c) nach dem Schleifendurchlauf von f .

Sei \bar{K} das letzte K , für das $\pi_D(K) \neq \emptyset$ ist. Dann ist die Menge aller π_D zu diesem Zeitpunkt gleich dem Zustand zu beginnt des Schleifendurchlaufes von f und damit gilt dasselbe für B . Für alle K nach \bar{K} gilt $\pi_D(K) = \emptyset$, also war vor dem Durchlauf $K \notin B$, da (c) galt. Demnach gab es keinen Weg zu K und damit kann durch das Hinzufügen von $\tilde{\pi}$ kein Kreis in B über K gebildet werden. Demnach gilt (b) auch nach dem Durchlauf von f . \square

Daraus folgt:

Satz 3.11. *Nach der Durchführung von Algorithmus 4 für jeden DP genügen die BTP-DP-Faserinstallationen der Annahme 2.3.*

Beweis. Nach Lemma 3.10 gilt, dass das in diesem Lemma definierte B^* nach Durchführung von Algorithmus 4 ein Baum ist. Da jedoch B^* nach Durchlauf des Algorithmus das neue Kundennetzwerk des DP bildet gilt damit auch Annahme 2.3. \square

3.3.2 Methode `deleteDPCOCycle()`

Die Methode hat die Aufgabe DP-CO-Kreise zu entfernen. Dabei gilt nach Definition 3.2, dass jeder Kreis genau einem Kundennetzwerk eines DP D bzw. der CO-Verbindung desselben DP D zugeordnet ist. Deswegen wird die Entfernung der Kreise wieder für alle DPs getrennt durchgeführt.

Außerdem ist von Bedeutung, dass die Methode `deleteDPCOCycle()` nach der Methode `deleteSubnetworkCycle()` aufgerufen wird. Somit sind Kundennetzwerke von DPs

kreisfrei und nach Korollar 1.11 zusammenhängend, weswegen in einem Kundennetzwerk zwischen zwei Knoten ein eindeutiger Pfad existiert.

Sei χ wieder definiert wie in Abschnitt 3.3.1. Dann stellt Algorithmus 5 die Methode `deleteDPCOCycle()` dar.

Mit diesem Algorithmus lassen sich die folgenden Aussagen zeigen.

Proposition 3.12.

- (a) Nach Durchführung des Algorithmus 5 gilt Annahme 2.4.
- (b) Die Knoten \bar{S}_1 und \bar{S}_2 aus dem Algorithmus existieren immer, womit die Umlegung der weiteren DP-CO-Faserinstallationen in den Zeilen 19 bis 26 korrekt verläuft.
- (c) Es werden genau die Teilstücke einer Faser f in $\bar{F} \setminus F$, die Kanten aus E^* enthalten, umgelegt, welche zwischen zwei Knoten aus N verlaufen.

Beweis. zu (a): Nach der Durchführung des Algorithmus verlaufen DP-CO-Faserinstallationen f , die vorher einen DP-CO-Kreis mit N gebildet haben, ab dem ersten Knoten von π_f in N nur auf Kanten in N (siehe Zeilen 14 bis 18 in Algorithmus 5). Also gilt Annahme 2.4.

Zum Beweis der weiteren Aussagen sei f in $\bar{F} \setminus F$ mit $(E^* \cap \pi_f) \neq \emptyset$.

zu (b): Nach Annahme 3.8 überschneiden sich DP-Netzwerke von COs nicht, weswegen wir nur Faserinstallationen f betrachten brauchen, die aus C ausgehen. Also verläuft f von C zu einem DP. Sei e eine Kante aus π_f die in E^* liegt und K_e ein inzidenter Knoten zu e . Damit liegt e nach Konstruktion von E^* auch in π , womit π und π_f auch über K_e laufen. Nach Annahme 3.7 existiert nur ein Weg von C nach K_e im DP-Netzwerk von C , weswegen π und π_f von C nach K_e über denselben Teilpfad verlaufen. Damit ist jedoch Konstruktion von E^* auch $S_1 \in N$ in π_f , womit die Knoten \bar{S}_1 und \bar{S}_2 existieren.

zu (c): Sei π'_f ein Teilstück nach der Beschreibung von Aussage (c). Da vor und nach π'_f Knoten auf π_f existieren, die in N liegen, liegt π'_f zwischen \bar{S}_1 und \bar{S}_2 und wird damit umgelegt. Umgekehrt gilt, dass wenn π'_f nicht zwischen zwei Knoten aus N verläuft, π'_f in π_f hinter \bar{S}_2 liegt (nach Konstruktion und Annahme 3.7 kann π'_f nicht vor \bar{S}_1 liegen). Damit wird π'_f nicht umgelegt. \square

Ergänzend zu den Aussagen der Proposition gilt, dass Verbindungen, welche vorher denselben Teilpfad durch N genutzt haben, auch nun noch auf demselben Pfad verlaufen, was den Bündlungseffekt (siehe Teil 1.1.3) unterstützt.

Input : DP Standort D ; Kundennetzwerk N des DP; CO C zu D ; Pfad π der DP-CO-Verbindung; Menge F aller Faserinstallationen von C zu D ; Menge \bar{F} aller Faserinstallationen auf DP-CO-Stufe; C_f der CO- und D_f der DP-Standort zwischen denen $f \in \bar{F}$ verläuft

Output : /

```

1 Setze Knoten  $K$  auf  $C$  und Knoten  $S_1$  auf  $null$ ;
2 Setze Kantenmenge  $E^*$  auf  $\emptyset$ ;
3 if  $K \in N$  then
4   |  $S_1 := K$ ;
5 foreach Kante  $e$  in  $\pi$  do
6   |  $K := \chi(K, e)$ ;
7   | if ( $S_1 \neq null$ ) then
8     |   if ( $e \notin N$ ) then
9       |     |  $E^* := E^* \cup e$ ;
10    |   else
11     |     if  $K \in N$  then
12       |       |  $S_1 := K$ ;
13 if  $E^* \neq \emptyset$  then
14   | Ermittle  $\pi_1 \subseteq \pi$ , den Teilpfad von  $\pi$  von  $C$  bis  $S_1$ ;
15   | Ermittle  $\pi_2$ , den eindeutigen Pfad in  $N$  von  $S_1$  nach  $D$ ;
16   | foreach  $f$  in  $F$  do
17     |    $\pi_f := \pi_1 \cup \pi_2$ ;
18     |    $l_f := \sum_{e \in \pi_f} l_e$ ;
19   | foreach  $f$  in  $\bar{F} \setminus F : (E^* \cap \pi_f) \neq \emptyset$  do
20     |   | Ermittle ersten Knoten  $\bar{S}_1$  von  $\pi_f$  in  $N$ ;
21     |   | Ermittle letzten Knoten  $\bar{S}_2$  von  $\pi_f$  in  $N$ ;
22     |   | Ermittle  $\bar{\pi}_1 \subseteq \pi_f$ , den Teilpfad von  $\pi_f$  von  $C_f$  bis  $\bar{S}_1$ ;
23     |   | Ermittle  $\bar{\pi}_2$ , den eindeutigen Pfad in  $N$  von  $\bar{S}_1$  nach  $\bar{S}_2$ ;
24     |   | Ermittle  $\bar{\pi}_3 \subseteq \pi_f$ , der Teilpfad von  $\pi_f$  von  $\bar{S}_2$  bis  $D_f$ ;
25     |   |  $\pi_f := \bar{\pi}_1 \cup \bar{\pi}_2 \cup \bar{\pi}_3$ ;
26     |   |  $l_f := \sum_{e \in \pi_f} l_e$ ;
    
```

Algorithmus 5 : Entfernung der DP-CO-Kreise

Kapitel 4

Ergebnisse

In diesem Kapitel werden die Verbesserungen und das Verhalten der Shift- und Kreisentfernungsmethoden anhand von konkreten Testinstanzen überprüft. Die Resultate werden anschließend analysiert und interpretiert. Aus dem Vergleich von theoretischem Potenzial und realer Kostenersparnis werden schließlich mögliche Erweiterungen der Methoden abgeleitet.

4.1 Berechnungen

Im Folgenden werden Rechenergebnisse der in Kapitel 2 und 3 vorgestellten Optimierungsmethoden erläutert. Das Shiften wurde dabei nur als Variante (b), also mit neuen Standorten, durchgeführt (vgl. Definition 2.1). Als neue potenzielle DP-Standorte waren alle Knoten zugelassen, die in der Ausgangslösung keine potenziellen BTP-, DP- oder CO-Standorte waren.

Die verwendeten Ausgangslösungen zum Shiften sind in Tabelle 4.1 dargestellt.

Die Tabelle beinhaltet für jede Instanz Daten über die Anzahl der eröffneten BTPs, DPs

| Instanz | #BTP | #DP | #CO | Faserlänge [m] | DP-Gap [%] | Splitt | Gesamtkosten |
|---------|------|-----|-----|----------------|------------|--------|--------------|
| T | 39 | 6 | 1 | 96134 | 15,10 | 32 | 792209 |
| L | 1670 | 43 | 5 | 1066178 | 18,23 | 32 | 6355237 |
| R | 1946 | 88 | 1 | 19980138 | 9,90 | 1 | 18820702 |
| M | 476 | 6 | 1 | 3247710 | 9,60 | 1 | 4269912 |
| V | 238 | 14 | 1 | 111140 | 15,10 | 32 | 1331453 |

Tabelle 4.1: Instanzen als Ausgangslösung für das Shiften

und COs. Außerdem ist die Summe der Längen aller verwendeten Glasfaserinstallationen angegeben (Faserlänge), um einen zusätzlichen Eindruck von der Instanzgröße zu erhalten. Die letzten Daten beschreiben die Größe des aus der Nichtoptimalität der Lösung des DP-Usecases resultierenden Verbesserungspotenzials (DP-Gap [%]), die einheitliche Spliterrate der BTPs (Splitt) sowie die Gesamtkosten der Netze.

Ausgehend von diesen Instanzen wurde die Shiftmethode und die Kreisentfernung angewendet. Die Ergebnisse sind in Tabelle 4.2 zu sehen.

Jede Instanz wurde dabei mit verschiedenen Varianten des Shiftens getestet. Dabei steht „a“ für die approximierte Kostenberechnung, wobei zwischen den Kostenwertvarianten „I“ und „II“ unterschieden wird (vgl. Abschnitt 2.4 und 2.5). Demgegenüber steht die Vergleichsrechnung mit Realkosten („r“).

Für die approximierten Shiftvarianten gibt es außerdem die Option „-t“. Ist diese angegeben, wird jedes DP-Kundennetzwerk nach dem Shiften mittels Realkostenberechnung auf seine Kostenersparnis gegenüber der Ausgangslösung überprüft. Ein neuer DP-Standort ist dabei nur dann zulässig, wenn sich die Kosten im Vergleich zum ursprünglichen Standort verringert haben. Ist dies nicht der Fall, bleibt der alte Standort des DP erhalten.

Die weiteren Daten in Tabelle 4.2 sind:

- Zeit [s] - die Laufzeit der Shiftmethode
- Shift [%] - der Anteil der geshifteten DPs im Verhältnis zur Anzahl aller DPs
- $\emptyset \#$ Kanten - die durchschnittliche Anzahl an Kanten, über die DP-Standorte verschoben wurden, ausgehend von den DP-Standorten, die verschoben wurden
- Kreis Δ [%] - prozentuale Kostenverbesserung durch die Kreisentfernung
- Shift Δ [%] - prozentuale Kostenverbesserung durch die Shiftmethode
- Gesamt Δ [%] - prozentuale Kostenverbesserung durch Kreisentfernung und Shiften

Interpretation Zunächst fällt auf, dass bei allen Instanzen außer „R“ keine Kreisverbesserungen erfolgen. Das liegt schlicht daran, dass in diesen Instanzen keine Kreise existieren.

In der Instanz „R“ enthält die Lösung zwei Kundennetzwerkkreise aus je drei Kanten, von denen jeweils eine aus den Kundennetzwerken entfernt werden kann. Bei dieser Entfernung bildet sich ein DP-CO-Kreis (vgl. Erläuterung in Teil 3.3), der anschließend ebenfalls entfernt wird. Da also insgesamt nur zwei Kanten aus diesem vergleichsweise großen Netz entfernt werden, fällt die Ersparnis gering aus.

Neben der geringen Kreisentfernungsverbesserung ist vor allem die Erhöhung der Gesamtkosten der Netze „R“ und „M“ bei Anwendung der Variante „a I“ außergewöhnlich. Während bei „R“ wenigstens noch einige Shifts Verbesserungen bringen, fällt in „M“ *jedes* Kundennetzwerk durch den Test der Option „-t“.

| Instanz | Variante | Zeit [s] | Shift [%] | ∅ # Kanten | Kreis Δ [%] | Shift Δ [%] | Gesamt Δ [%] |
|---------|----------|-----------|-----------|------------|-------------|-------------|--------------|
| T | a I | 3,330 | 50,0 | 6,33 | 0 | 0,258 | 0,258 |
| | a I -t | 5,428 | 50,0 | 6,33 | 0 | 0,258 | 0,258 |
| | a II | 3,611 | 50,0 | 5,67 | 0 | 0,297 | 0,297 |
| | a II -t | 6,432 | 50,0 | 5,67 | 0 | 0,297 | 0,297 |
| | r | 31,463 | 66,7 | 4,75 | 0 | 0,300 | 0,300 |
| L | a I | 41,386 | 67,4 | 4,34 | 0 | 0,360 | 0,360 |
| | a I -t | 427,686 | 46,5 | 4,50 | 0 | 0,394 | 0,394 |
| | a II | 41,505 | 74,4 | 3,88 | 0 | 0,366 | 0,366 |
| | a II -t | 469,546 | 65,1 | 4,07 | 0 | 0,379 | 0,379 |
| | r | 3248,289 | 72,1 | 3,16 | 0 | 0,382 | 0,382 |
| R | a I | 68,549 | 95,5 | 7,93 | 0,005 | -0,487 | -0,482 |
| | a I -t | 1925,990 | 31,8 | 6,50 | 0,005 | 0,092 | 0,097 |
| | a II | 64,225 | 84,1 | 3,69 | 0,005 | 0,208 | 0,213 |
| | a II -t | 1690,532 | 72,7 | 3,84 | 0,005 | 0,218 | 0,223 |
| | r | 10880,586 | 87,5 | 3,61 | 0,005 | 0,239 | 0,244 |
| M | a I | 11,119 | 100,0 | 7,83 | 0 | -0,837 | -0,837 |
| | a I -t | 27,004 | 0,0 | — | 0 | 0,000 | 0,000 |
| | a II | 9,877 | 66,7 | 8,00 | 0 | 0,417 | 0,417 |
| | a II -t | 23,532 | 66,7 | 8,00 | 0 | 0,417 | 0,417 |
| | r | 156,213 | 66,7 | 7,00 | 0 | 0,405 | 0,405 |
| V | a I | 7,269 | 78,6 | 4,27 | 0 | 0,586 | 0,586 |
| | a I -t | 29,188 | 50,0 | 4,29 | 0 | 0,716 | 0,716 |
| | a II | 7,885 | 78,6 | 3,18 | 0 | 0,576 | 0,576 |
| | a II -t | 26,817 | 71,4 | 3,30 | 0 | 0,576 | 0,576 |
| | r | 152,116 | 85,7 | 2,75 | 0 | 0,582 | 0,582 |

Tabelle 4.2: Berechnungsergebnisse

Dieses Phänomen erklärt sich durch die Spliterrate von 1 an jedem BTP bei diesen Instanzen. Dadurch gehen genauso viele Faser in den DP hinein wie hinaus; es ist keine Anbindung mehrerer BTPs über eine Faser möglich. Dies bewirkt enorm hohe Installationskosten auf der DP-CO-Stufe. Da die Variante „I“, wie in Teil 2.5.3 beschrieben, Probleme mit hohen Kosten auf dieser Stufe hat, kommen die Verschlechterungen zustande.

Neben der Verschlechterung in den beiden Instanzen sind auch die Shiftwerte für „V“ und Variante „I“, für „M“ und Variante „II“ sowie für „L“ und Variante „I“ mit Option „-t“ ungewöhnlich. Bei diesen Kombinationen liegen die Kostenverbesserungen der approximativen Lösungen *über* denen der Lösungen mit exakten, also Realkosten.

Dieses Ergebniss kann auf Grund der Struktur der Methode `findDPLocations()` im Shiftalgorithmus zustande kommen (vgl. Teil 2.3.1). Die Methode sucht nur hinter einem günstigeren als dem aktuellen DP-Standort nach weiteren guten Standorten für den DP. Wenn also ein potenzieller Standort S zum Beispiel hohe Setupkosten hat und deswegen nicht günstiger als der aktuelle DP-Standort ist, wird „hinter“ S nicht weitergesucht. Bei der approximierten Kostenberechnung werden die Kosten jedoch nicht exakt berechnet, weswegen S durchaus ein günstigerer Standort im Bezug auf die approximierten Kosten sein kann.

Falls ein kostengünstigster potenzieller DP-Standort K eines Kundennetzwerkes „hinter“ einem solchen *blockierenden Standort* S liegt, kann es also dazu kommen, dass das Shiften mit Realkosten K nicht findet, das Shiften mit approximierten Kosten jedoch schon.

Eine weitere Erklärung bietet die Auswahl eines neuen DP-Standortes in Algorithmus 2 für den Fall, dass mehrere Shifts kostenverringern sind. Hier wird der Standort mit der größten Kostenverringerung gewählt (vgl. Zeile 15 des Algorithmus). Alle weiteren potenziellen Standorte und damit auch die hinter diesen Standorten liegenden Knoten, werden für die weitere Suche ignoriert.

Wiederum könnte durch die Ungenauigkeit der approximierten Kosten hier ein anderer Standort gewählt und somit eine bessere Lösung erreicht werden.

Im allgemeinen Vergleich der beiden Kostenwertvarianten „I“ und „II“ fällt auf, dass sie relativ ähnliche Werte liefern, jedoch in den für „I“ problematischen Beispielen „II“ die wesentlich bessere Variante ist. Weiterhin gilt, dass das durch die Realkosten gegebene Shiftpotenzial, das durchschnittlich etwas unter einem halben Prozent der jeweiligen Gesamtkosten liegt, sowohl von Variante „I“ als auch von Variante „II“ gut genutzt wird. Wenn die approximierten Varianten nicht über der Realvariante liegen, so sind die doch, bis auf die Probleme von „I“, sehr dicht an den Verbesserungswerten von „r“.

4.2 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde die Shift Methode vorgestellt, welche versucht, gültige Lösungen einer FTTx-Probleminstanz zu verbessern. In Vorbereitung auf das Shiften wird die Kreisentfernungsmethode auf die Lösung angewandt, um benötigte Eigenschaften der Lösung zu sichern und Verbesserungspotenziale zu heben.

Neben den Algorithmusbeschreibungen wurden für beide Methoden sowohl theoretische als auch praktische Verbesserungsmöglichkeiten untersucht. Dabei wurde deutlich, dass die realen Verbesserungen jeweils nur einen Bruchteil des theoretischen Potenzials betragen. Dies kann sowohl an der Qualität der theoretischen Betrachtungen oder an der des Shiftalgorithmus liegen.

Deswegen sollen abschließend einige Ansätze zur Verbesserung der Shiftmethode diskutiert werden.

Zum einen könnten die in 4.1 angesprochenen Defizite der Methode `findDPLocations()` behoben werden. Für die Auswahl eines neuen DP-Standortes aus vielen günstigen würde sich die Verwendung eines Suchbaumes anbieten. Dabei wird zunächst ein günstiger Standort gewählt und die Suche von diesem aus fortgesetzt. Nachdem die Suche von diesem Standort aus beendet ist, wird das Kundennetzwerk auf den Zustand vor der Wahl des Standortes zurückversetzt, was „Backtracking“ genannt wird. Anschließend wird der nächste günstige Standort gewählt und von diesem aus wiederum die Suche gestartet. Wenn auf diese Art und Weise alle günstigen Standorte abgearbeitet sind, wird aus den jeweils besten Standorten der einzelnen Suchen der insgesamt beste als neuer DP-Standort gewählt.

Dieses Vorgehen würde jedoch noch nicht das Phänomen der blockierenden Standorte lösen. Hierzu wäre die Verwendung von weiteren Heuristiken, wie beispielsweise einer simulierten Abkühlung (vgl. Kapitel I 7. [ES00]), denkbar, bei der unter bestimmten Bedingungen die Wahl eines potenziellen Standortes möglich ist, welcher teurer als der aktuellen DP-Standort ist. Somit können blockierende Standorte überwunden werden.

Als weitere Möglichkeit der Verbesserung birgt auch die Kreisentfernung zusätzliches Potenzial. So wird in Teil 3.2.1 zwar erläutert, wie eine Entfernung von Kundennetzwerk-kreisen ohne Verlängerung von Installationen möglich ist, jedoch wird dies in Algorithmus 4 bisher nicht umgesetzt.

Schließlich bietet sich die Sicherstellung von Annahme 2.5 an, die sowohl in Kapitel 2 als auch in Kapitel 3 gefordert wird. Auch die Richtigkeit der Annahmen 3.7 und 3.8 aus Kapitel 3 ist nicht immer gegeben und könnte durch separate Methoden hergestellt werden. Hierbei lässt sich zusätzlich zur Sicherstellung der gewünschten Eigenschaft auch das in den Abschnitten 2.2 und 3.2.2 erwähnte offensichtliche Verbesserungspotenzial ausnutzen.

Für Annahme 3.7 kann dabei ähnlich zum Entfernen der Kundennetzwerkzeuge (vgl. Algorithmus 4) vorgegangen werden. Die Herstellung der anderen beiden Annahmen ist weitaus komplexer. So müssten BTPs bzw. DPs zwischen verschiedenen DPs bzw. COs umverteilt werden, sodass sich die entsprechenden Kunden- und DP-Netzwerke nicht mehr überlappen. Dabei müssen jedoch die Kapazitätsbeschränkungen der jeweiligen Anbieter eingehalten und eventuelle Ungleichmäßigkeiten im Ausmaß der Überschneidung ausgeglichen werden.

Insgesamt existiert also eine Vielzahl weiterer Möglichkeiten der Verbesserung der Shiftmethode, deren Implementierung eine signifikante Steigerung der Kostenersparnis erwarten lässt.

Literaturverzeichnis

- [ES00] EISELT, H. A. (Hrsg.) ; SANDBLOM, C.-L. (Hrsg.): *Integer Programming and Network Models*. 1st. Springer Berlin Heidelberg, 2000
- [Jun94] JUNGNICHEL, Dieter (Hrsg.): *Graphen, Netzwerke und Algorithmen*. 3. BI-Wiss.-Verl., 1994
- [Rig11] RIGBY, P. (Hrsg.): *FTTH Handbook*. 4th. FTTH Council Europe, 2011