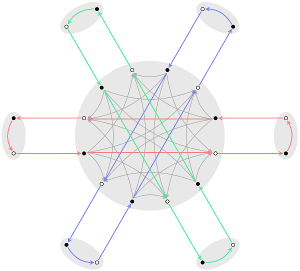
Berlin Mathematics Research Center MATH+ | Freie Universität Berlin | ZIB Zuse Institute Berlin



Umsteigen ohne Warten?

Mathematische Fahrplanoptimierung

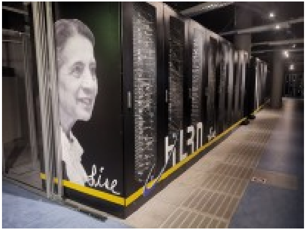
Dr. Niels Lindner

Freie Universität Berlin & Zuse-Institut Berlin

Mathenacht aus Berlin, Bonn und Münster

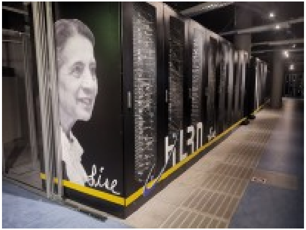
02.12.2022

Zuse-Institut Berlin



Zuse-Institut Berlin

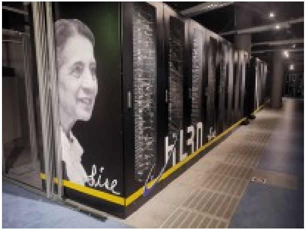
- benannt nach Konrad Zuse (1910-1995), dem Erfinder des ersten frei programmierbaren digitalen Computers
- interdisziplinäres Forschungsinstitut
- auf dem Campus der Freien Universität in Berlin-Dahlem



Zuse-Institut Berlin

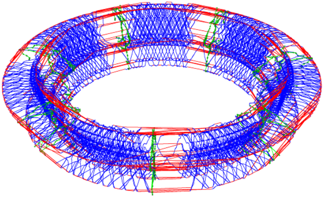
- benannt nach Konrad Zuse (1910-1995), dem Erfinder des ersten frei programmierbaren digitalen Computers
- interdisziplinäres Forschungsinstitut
- auf dem Campus der Freien Universität in Berlin-Dahlem

- angewandte Mathematik & datenintensives Hochleistungsrechnen
- Modellierung, Simulation und Optimierung mit Partnern aus Industrie und Wissenschaft



Projekte der Abteilung Netzwerkoptimierung

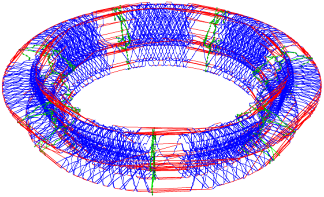
Diskrete Optimierung im öffentlichen Verkehr @ MobilityLab



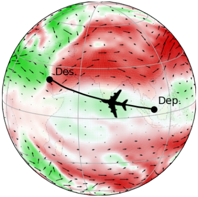
Fahrzeugumlaufplanung
ICE-Flotte der Deutschen Bahn

Projekte der Abteilung Netzwerkoptimierung

Diskrete Optimierung im öffentlichen Verkehr @ MobilityLab



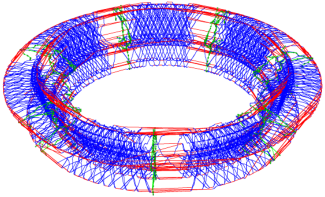
Fahrzeugumlaufplanung
ICE-Flotte der Deutschen Bahn



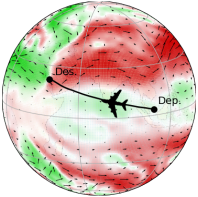
Flugroutenoptimierung
mit Lufthansa Systems

Projekte der Abteilung Netzwerkoptimierung

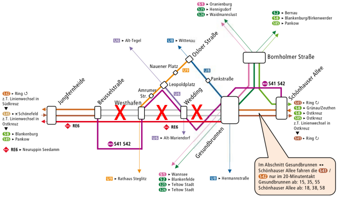
Diskrete Optimierung im öffentlichen Verkehr @ MobilityLab



Fahrzeugumlaufplanung
ICE-Flotte der Deutschen Bahn



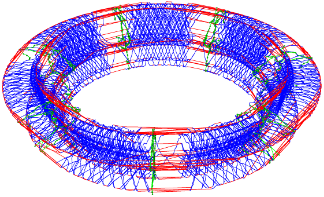
Flugroutenoptimierung
mit Lufthansa Systems



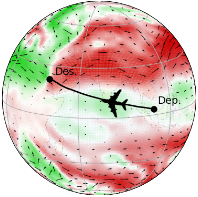
Baufahrplanoptimierung
Netz der S-Bahn Berlin

Projekte der Abteilung Netzwerkoptimierung

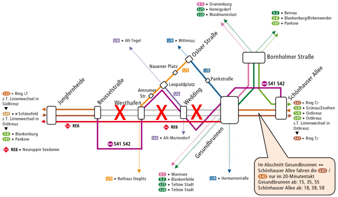
Diskrete Optimierung im öffentlichen Verkehr @ MobilityLab



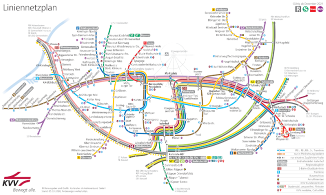
Fahrzeugumlaufplanung
ICE-Flotte der Deutschen Bahn



Flugroutenoptimierung
mit Lufthansa Systems



Baufahrplanoptimierung
Netz der S-Bahn Berlin



Linienplanung
Kombilösung Karlsruhe

Was ist ein Fahrplan?

S75 — **S Wartenberg – S+U Warschauer Str.**
(gültig ab 11.12.2022)

S-Bahn Berlin GmbH

		montags bis freitags, nicht an Feiertagen										
Verkehrshinweise						20		10		20		
S Wartenberg	**ab**	0 16	0 36		3 56		4 56		21 16		23 56	
S Hohenschönhausen Bhf		0 18	0 38		3 58		4 58		21 18		23 58	
S Gehrenseestr.		0 20	0 40		4 00		5 00		21 20		0 00	
S Springpfuhl	○	0 23	0 43		4 03		5 03		21 23		0 03	
S Springpfuhl	**ab**	0 26	0 46		4 06		5 06		21 26		0 06	
S Friedrichsfelde Ost		0 29	0 49		4 09		5 09		21 29		0 09	
S+U Lichtenberg Bhf		0 31	0 51		4 11		5 11		21 31		0 11	
S Nöldnerplatz		0 33	0 53		4 13		5 13		21 33		0 13	
S Ostkreuz Bhf	○	0 35	0 55		4 15		5 15		21 35		0 15	
S Ostkreuz Bhf	**ab**	0 36	0 56		4 16		5 16		21 36		0 16	
S+U Warschauer Str.	○	0 38	0 58		4 18		5 18		21 38		0 18	

Was ist ein Fahrplan?

S75	**S Wartenberg – S+U Warschauer Str.** (gültig ab 11.12.2022)

S-Bahn Berlin GmbH

		montags bis freitags, nicht an Feiertagen											
Verkehrshinweise						**20**		**10**		**20**			
S Wartenberg	**ab**	0 16	0 36		3 56		4 56		21 16		23 56		
S Hohenschönhausen Bhf		0 18	0 38		3 58		4 58		21 18		23 58		
S Gehrenseestr.		0 20	0 40		4 00		5 00		21 20		0 00		
S Springpfuhl	○	0 23	0 43		4 03		5 03		21 23		0 03		
S Springpfuhl	**ab**	0 26	0 46		4 06		5 06		21 26		0 06		
S Friedrichsfelde Ost		0 29	0 49		4 09		5 09		21 29		0 09		
S+U Lichtenberg Bhf		0 31	0 51		4 11		5 11		21 31		0 11		
S Nöldnerplatz		0 33	0 53		4 13		5 13		21 33		0 13		
S Ostkreuz Bhf	○	0 35	0 55		4 15		5 15		21 35		0 15		
S Ostkreuz Bhf	**ab**	0 36	0 56		4 16		5 16		21 36		0 16		
S+U Warschauer Str.	○	0 38	0 58		4 18		5 18		21 38		0 18		

Beobachtungen

Was ist ein Fahrplan?

S75 — **S Wartenberg – S+U Warschauer Str.**
(gültig ab 11.12.2022)

S-Bahn Berlin GmbH

		montags bis freitags, nicht an Feiertagen											
Verkehrshinweise													
S Wartenberg	**ab**	0 16	0 36		3 56	**20**	4 56	**10**	21 16	**20**	23 56		
S Hohenschönhausen Bhf		0 18	0 38		3 58		4 58		21 18		23 58		
S Gehrenseestr.		0 20	0 40		4 00		5 00		21 20		0 00		
S Springpfuhl	○	0 23	0 43		4 03		5 03		21 23		0 03		
S Springpfuhl	**ab**	0 26	0 46		4 06		5 06		21 26		0 06		
S Friedrichsfelde Ost		0 29	0 49		4 09		5 09		21 29		0 09		
S+U Lichtenberg Bhf		0 31	0 51		4 11		5 11		21 31		0 11		
S Nöldnerplatz		0 33	0 53		4 13		5 13		21 33		0 13		
S Ostkreuz Bhf	○	0 35	0 55		4 15		5 15		21 35		0 15		
S Ostkreuz Bhf	**ab**	0 36	0 56		4 16		5 16		21 36		0 16		
S+U Warschauer Str.	○	0 38	0 58		4 18		5 18		21 38		0 18		

Beobachtungen

- Fahrpläne gelten für **Linien**. (*hier: S75*)

Was ist ein Fahrplan?

S75 — S Wartenberg – S+U Warschauer Str. (gültig ab 11.12.2022)

S-Bahn Berlin GmbH

		montags bis freitags, nicht an Feiertagen											
Verkehrshinweise						20		10		20			
S Wartenberg	**ab**	0 16	0 36		3 56		4 56		21 16		23 56		
S Hohenschönhausen Bhf		0 18	0 38		3 58		4 58		21 18		23 58		
S Gehrenseestr.		0 20	0 40		4 00		5 00		21 20		0 00		
S Springpfuhl	○	0 23	0 43		4 03		5 03		21 23		0 03		
S Springpfuhl	**ab**	0 26	0 46		4 06		5 06		21 26		0 06		
S Friedrichsfelde Ost		0 29	0 49		4 09		5 09		21 29		0 09		
S+U Lichtenberg Bhf		0 31	0 51		4 11		5 11		21 31		0 11		
S Nöldnerplatz		0 33	0 53		4 13		5 13		21 33		0 13		
S Ostkreuz Bhf	○	0 35	0 55		4 15		5 15		21 35		0 15		
S Ostkreuz Bhf	**ab**	0 36	0 56		4 16		5 16		21 36		0 16		
S+U Warschauer Str.	○	0 38	0 58		4 18		5 18		21 38		0 18		

Beobachtungen

- Fahrpläne gelten für **Linien**. (*hier: S75*)
- Fahrpläne geben **Abfahrts- und Ankunftszeiten** an.
  (*05:16 ab Ostkreuz, 05:18 an Warschauer Str.*)

Was ist ein Fahrplan?

S75 **S Wartenberg – S+U Warschauer Str.**
(gültig ab 11.12.2022)

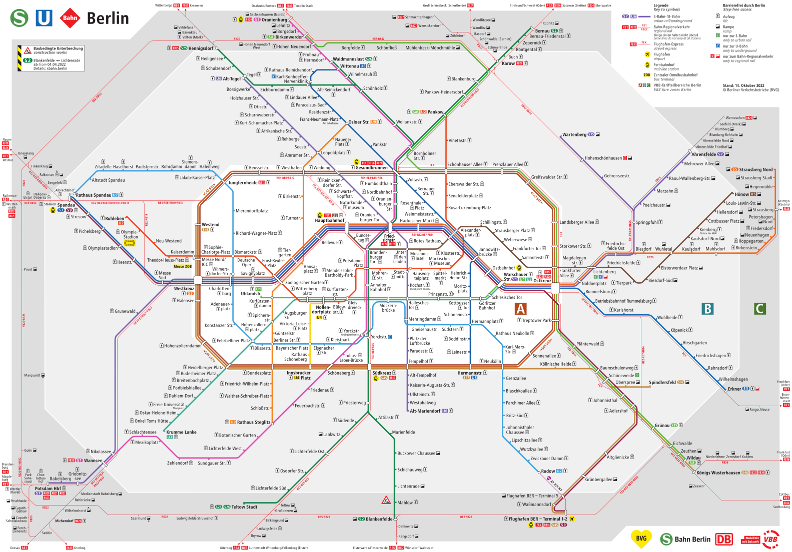
S-Bahn Berlin GmbH

		montags bis freitags, nicht an Feiertagen											
Verkehrshinweise						20		10		20			
S Wartenberg	**ab**	0 16	0 36		3 56		4 56		21 16		23 56		
S Hohenschönhausen Bhf		0 18	0 38		3 58		4 58		21 18		23 58		
S Gehrenseestr.		0 20	0 40		4 00		5 00		21 20		0 00		
S Springpfuhl	○	0 23	0 43		4 03		5 03		21 23		0 03		
S Springpfuhl	**ab**	0 26	0 46		4 06		5 06		21 26		0 06		
S Friedrichsfelde Ost		0 29	0 49		4 09		5 09		21 29		0 09		
S+U Lichtenberg Bhf		0 31	0 51		4 11		5 11		21 31		0 11		
S Nöldnerplatz		0 33	0 53		4 13		5 13		21 33		0 13		
S Ostkreuz Bhf	○	0 35	0 55		4 15		5 15		21 35		0 15		
S Ostkreuz Bhf	**ab**	0 36	0 56		4 16		5 16		21 36		0 16		
S+U Warschauer Str.	○	0 38	0 58		4 18		5 18		21 38		0 18		

Beobachtungen

- Fahrpläne gelten für **Linien**. (*hier: S75*)
- Fahrpläne geben **Abfahrts- und Ankunftszeiten** an.
  (*05:16 ab Ostkreuz, 05:18 an Warschauer Str.*)
- Fahrpläne sind oft **Taktfahrpläne**.
  (*Fahrten wiederholen sich tagsüber alle 10 Minuten*)

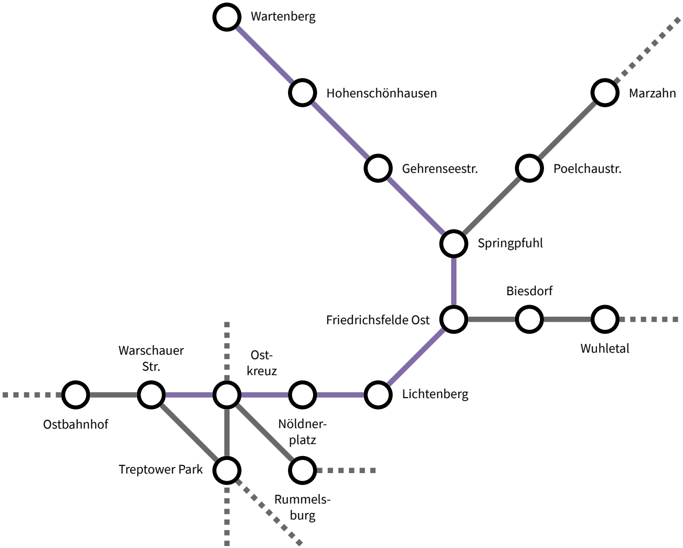
Was ist eine Linie? – Liniennetzplan



Berliner Verkehrsbetriebe (BVG)

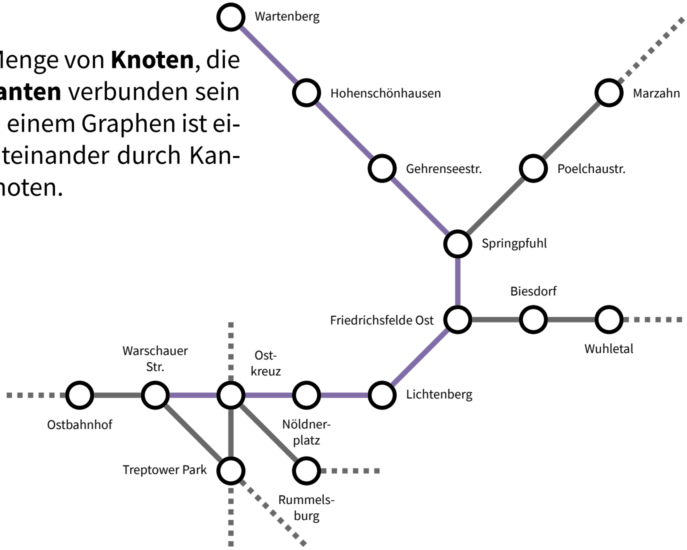
Was ist eine Linie? – S75 auf dem Liniennetzplan

Was ist eine Linie? – S75 auf abstraktem Streckennetz



Was ist eine Linie? – S75 auf abstraktem Streckennetz

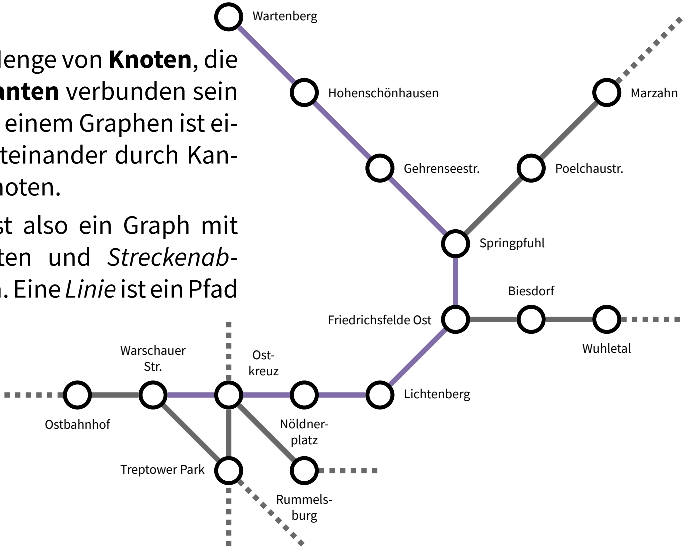
Ein **Graph** ist eine Menge von **Knoten**, die paarweise durch **Kanten** verbunden sein können. Ein **Pfad** in einem Graphen ist eine Folge jeweils miteinander durch Kanten verbundener Knoten.



Was ist eine Linie? – S75 auf abstraktem Streckennetz

Ein **Graph** ist eine Menge von **Knoten**, die paarweise durch **Kanten** verbunden sein können. Ein **Pfad** in einem Graphen ist eine Folge jeweils miteinander durch Kanten verbundener Knoten.

Das *Streckennetz* ist also ein Graph mit *Stationen* als Knoten und *Streckenabschnitten* als Kanten. Eine *Linie* ist ein Pfad in diesem Graphen.



Graphen

Was ist ein Graph?

Ein **Graph** ist eine Menge von **Knoten**, die paarweise durch **Kanten** verbunden sein können. Ein **Pfad** in einem Graphen ist eine Folge jeweils miteinander durch Kanten verbundener Knoten.

Graphen

Was ist ein Graph?

Ein **Graph** ist eine Menge von **Knoten**, die paarweise durch **Kanten** verbunden sein können. Ein **Pfad** in einem Graphen ist eine Folge jeweils miteinander durch Kanten verbundener Knoten.

Beispiele

Graphen sind – wie Zahlen oder Dreiecke – ein *abstraktes Konzept*: Sie eignen sich zur Beschreibung von paarweisen Beziehungen jeder Art.

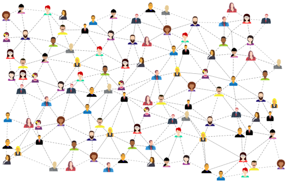
Graphen

Was ist ein Graph?

Ein **Graph** ist eine Menge von **Knoten**, die paarweise durch **Kanten** verbunden sein können. Ein **Pfad** in einem Graphen ist eine Folge jeweils miteinander durch Kanten verbundener Knoten.

Beispiele

Graphen sind – wie Zahlen oder Dreiecke – ein *abstraktes Konzept*: Sie eignen sich zur Beschreibung von paarweisen Beziehungen jeder Art.



Freundschaftsgraph in sozialen Netzwerken

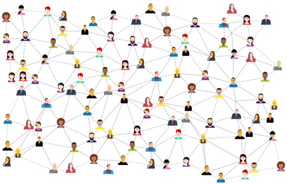
Graphen

Was ist ein Graph?

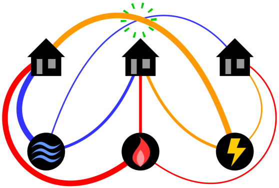
Ein **Graph** ist eine Menge von **Knoten**, die paarweise durch **Kanten** verbunden sein können. Ein **Pfad** in einem Graphen ist eine Folge jeweils miteinander durch Kanten verbundener Knoten.

Beispiele

Graphen sind – wie Zahlen oder Dreiecke – ein *abstraktes Konzept*: Sie eignen sich zur Beschreibung von paarweisen Beziehungen jeder Art.



Freundschaftsgraph in sozialen Netzwerken



Three Utilities Puzzle

(Cmglee via Wikimedia Commons)

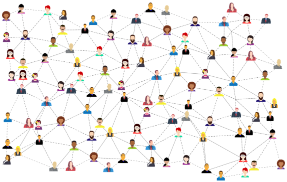
Graphen

Was ist ein Graph?

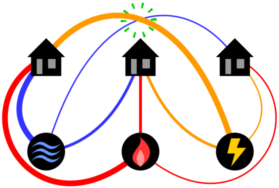
Ein **Graph** ist eine Menge von **Knoten**, die paarweise durch **Kanten** verbunden sein können. Ein **Pfad** in einem Graphen ist eine Folge jeweils miteinander durch Kanten verbundener Knoten.

Beispiele

Graphen sind – wie Zahlen oder Dreiecke – ein *abstraktes Konzept*: Sie eignen sich zur Beschreibung von paarweisen Beziehungen jeder Art.



Freundschaftsgraph in sozialen Netzwerken



Three Utilities Puzzle

(Cmglee via Wikimedia Commons)

Atomium in Brüssel

(Zairon via Wikimedia Commons)

Gerichtete Graphen

Was ist ein gerichteter Graph?

In einem **gerichteten Graphen** haben die Kanten eine *Richtung*, die durch einen Pfeil markiert wird. Es macht also einen Unterschied, ob eine Kante *von* einem Knoten *zu* einem anderen Knoten geht oder umgekehrt.

Gerichtete Graphen

Was ist ein gerichteter Graph?

In einem **gerichteten Graphen** haben die Kanten eine *Richtung*, die durch einen Pfeil markiert wird. Es macht also einen Unterschied, ob eine Kante *von* einem Knoten *zu* einem anderen Knoten geht oder umgekehrt.

Beispiel: S75

S75 fährt *von* Warschauer Str. *nach* Ostkreuz

S75 fährt *von* Ostkreuz *nach* Warschauer Str.

Gerichtete Graphen

Was ist ein gerichteter Graph?

In einem **gerichteten Graphen** haben die Kanten eine *Richtung*, die durch einen Pfeil markiert wird. Es macht also einen Unterschied, ob eine Kante *von* einem Knoten *zu* einem anderen Knoten geht oder umgekehrt.

Beispiel: S75

S75 fährt *von* Warschauer Str. *nach* Ostkreuz

S75 fährt *von* Ostkreuz *nach* Warschauer Str.

Gerichtete Pfade

Ein **gerichteter Pfad** in einem gerichteten Graphen ist ein Pfad, der der Pfeilrichtung folgt.

Mathematische Modellierung von Fahrplänen

Eine einzelne Fahrt der Linie S75 von Wartenberg nach Warschauer Str. ist ein gerichteter Pfad:

Mathematische Modellierung von Fahrplänen

Eine einzelne Fahrt der Linie S75 von Wartenberg nach Warschauer Str. ist ein gerichteter Pfad:

Ein **Fahrplan** ordnet jeder Fahrt einer Linie an jeder Station eine Ankunfts- und Abfahrtszeit zu – bis auf am Anfang und am Ende:

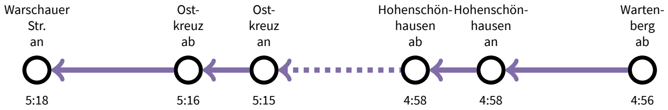
Mathematische Modellierung von Fahrplänen

Eine einzelne Fahrt der Linie S75 von Wartenberg nach Warschauer Str. ist ein gerichteter Pfad:

Ein **Fahrplan** ordnet jeder Fahrt einer Linie an jeder Station eine Ankunfts- und Abfahrtszeit zu – bis auf am Anfang und am Ende:

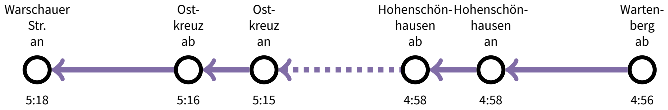
Um Knoten auf diesem gerichteten Pfad nicht manchmal eine und manchmal zwei Zeiten zuordnen zu müssen, benutzen wir der Übersicht halber **Ankunfts- und Abfahrtsknoten**:

Mathematische Modellierung von Fahrplänen



Gerichtete Kanten von einer Abfahrt zu einer Ankunft heißen **Fahrtkanten**, denn sie beschreiben die Fahrt eines Zuges von einer Station zur nächsten. Die anderen Kanten auf diesem gerichteten Pfad heißen **Haltekanten**, denn sie beschreiben den Halt eines Zuges in einer Station. Die Knoten sind nicht mehr Stationen, sondern **Ereignisse**.

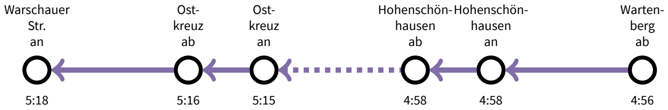
Mathematische Modellierung von Fahrplänen



Gerichtete Kanten von einer Abfahrt zu einer Ankunft heißen **Fahrtkanten**, denn sie beschreiben die Fahrt eines Zuges von einer Station zur nächsten. Die anderen Kanten auf diesem gerichteten Pfad heißen **Haltekanten**, denn sie beschreiben den Halt eines Zuges in einer Station. Die Knoten sind nicht mehr Stationen, sondern **Ereignisse**.

Beobachtung: Ein Fahrplan legt auch die **Länge** einer Fahrtkante bzw. Haltekante fest. Z. B. hat die abgebildete Fahrtkante von Ostkreuz nach Warschauer Str. eine Länge von 2 Minuten, denn das ist die Differenz zwischen 5:18 und 5:16.

Mathematische Modellierung von Fahrplänen



Gerichtete Kanten von einer Abfahrt zu einer Ankunft heißen **Fahrtkanten**, denn sie beschreiben die Fahrt eines Zuges von einer Station zur nächsten. Die anderen Kanten auf diesem gerichteten Pfad heißen **Haltekanten**, denn sie beschreiben den Halt eines Zuges in einer Station. Die Knoten sind nicht mehr Stationen, sondern **Ereignisse**.

Beobachtung: Ein Fahrplan legt auch die **Länge** einer Fahrtkante bzw. Haltekante fest. Z. B. hat die abgebildete Fahrtkante von Ostkreuz nach Warschauer Str. eine Länge von 2 Minuten, denn das ist die Differenz zwischen 5:18 und 5:16.

Frage: Was passiert mit einem Zug, wenn er das Ende der Fahrt an der Warschauer Str. erreicht?

Mathematische Modellierung von Fahrplänen

Gerichtete Kanten von einer Abfahrt zu einer Ankunft heißen **Fahrtkanten**, denn sie beschreiben die Fahrt eines Zuges von einer Station zur nächsten. Die anderen Kanten auf diesem gerichteten Pfad heißen **Haltekanten**, denn sie beschreiben den Halt eines Zuges in einer Station. Die Knoten sind nicht mehr Stationen, sondern **Ereignisse**.

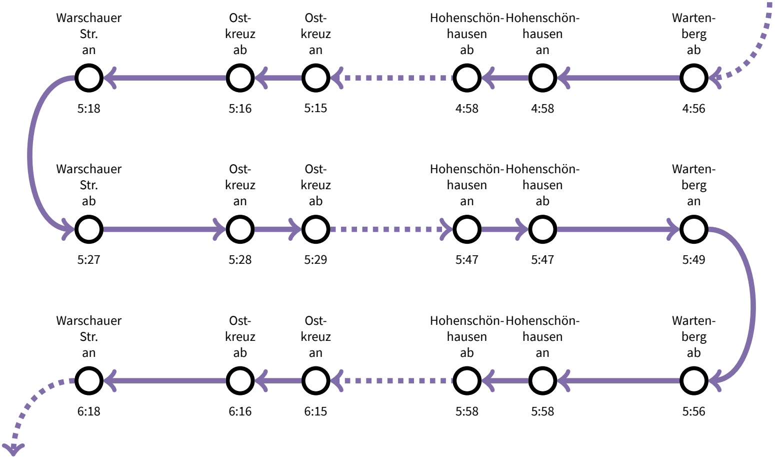
Beobachtung: Ein Fahrplan legt auch die **Länge** einer Fahrtkante bzw. Haltekante fest. Z. B. hat die abgebildete Fahrtkante von Ostkreuz nach Warschauer Str. eine Länge von 2 Minuten, denn das ist die Differenz zwischen 5:18 und 5:16.

Frage: Was passiert mit einem Zug, wenn er das Ende der Fahrt an der Warschauer Str. erreicht?

Antwort: Er **wendet** und fährt zurück.

Mathematische Modellierung von Fahrplänen

Die Fahrten, die ein einzelner Zug unternimmt, können wir uns als langen gerichteten Pfad in einem gerichteten Graphen mit Fahr-, Halte- und Wendekanten vorstellen:



Exakt 60 Minuten nach Abfahrt in Wartenberg fährt der gleiche Zug wieder dort ab.

Taktfahrpläne

Beim Fahrplan der Linie S75 wiederholen sich Ankünfte und Abfahrten tagsüber alle 10 Minuten. Wenn ein Zug um 4:56 in Wartenberg abfährt, dann auch um 5:06, 5:16, 5:26 usw.

Taktfahrpläne

Beim Fahrplan der Linie S75 wiederholen sich Ankünfte und Abfahrten tagsüber alle 10 Minuten. Wenn ein Zug um 4:56 in Wartenberg abfährt, dann auch um 5:06, 5:16, 5:26 usw.

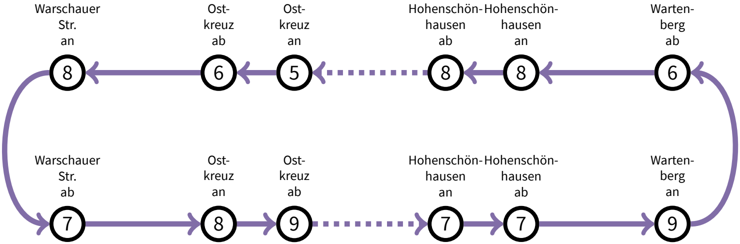
Schlussfolgerung: Die einzig relevante Information in den Ankunfts- und Abfahrtszeiten ist die Einerstelle der Minute. Anstelle von konkreten Uhrzeiten reicht es also, eine ganze Zahl zwischen 0 und 9 anzugeben. Das ist ein **Taktfahrplan**.

Taktfahrpläne

Beim Fahrplan der Linie S75 wiederholen sich Ankünfte und Abfahrten tagsüber alle 10 Minuten. Wenn ein Zug um 4:56 in Wartenberg abfährt, dann auch um 5:06, 5:16, 5:26 usw.

Schlussfolgerung: Die einzig relevante Information in den Ankunfts- und Abfahrtszeiten ist die Einerstelle der Minute. Anstelle von konkreten Uhrzeiten reicht es also, eine ganze Zahl zwischen 0 und 9 anzugeben. Das ist ein **Taktfahrplan**.

Vorsicht! Wir können z. B. die Abfahrten 4:56 und 5:56 ab Wartenberg nicht mehr unterscheiden – die Einerstelle der Minute ist in beiden Fällen 6. Damit sind Fahrten einer Linie keine langen gerichteten Pfade mehr, sondern kurze **gerichtete Kreise**:



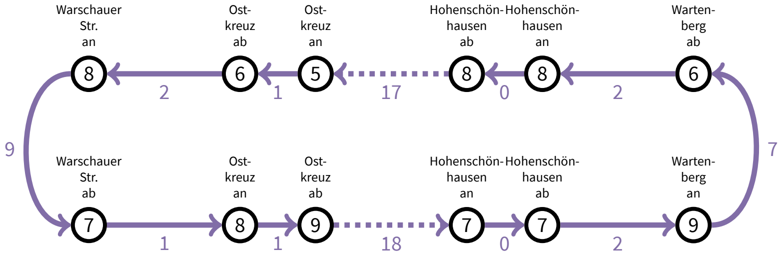
Taktfahrpläne

Nochmal Vorsicht! Die Uhrzeiten haben die Kantenlängen eindeutig festgelegt. Das ist bei Taktfahrplänen nicht mehr so: Zwischen der Abfahrt in Hohenschönhausen (zur Minute 8) und der Ankunft in Ostkreuz (Minute 5) könnten 7, aber auch 17, 27, ... Minuten vergehen – die Knotenbeschriftungen wären dieselben.

Taktfahrpläne

Nochmal Vorsicht! Die Uhrzeiten haben die Kantenlängen eindeutig festgelegt. Das ist bei Taktfahrplänen nicht mehr so: Zwischen der Abfahrt in Hohenschönhausen (zur Minute 8) und der Ankunft in Ostkreuz (Minute 5) könnten 7, aber auch 17, 27, ... Minuten vergehen – die Knotenbeschriftungen wären dieselben.

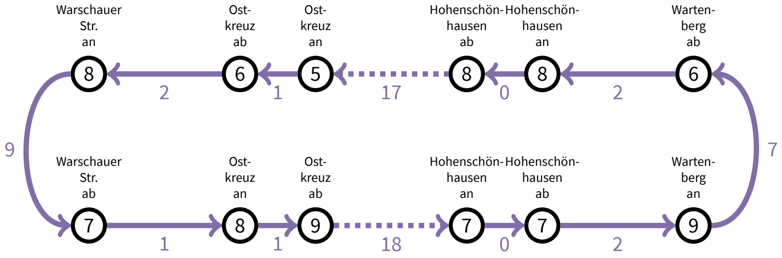
Daher ist es sinnvoll, die Kantenlängen auch anzugeben:



Taktfahrpläne

Nochmal Vorsicht! Die Uhrzeiten haben die Kantenlängen eindeutig festgelegt. Das ist bei Taktfahrplänen nicht mehr so: Zwischen der Abfahrt in Hohenschönhausen (zur Minute 8) und der Ankunft in Ostkreuz (Minute 5) könnten 7, aber auch 17, 27, ... Minuten vergehen – die Knotenbeschriftungen wären dieselben.

Daher ist es sinnvoll, die Kantenlängen auch anzugeben:



Beobachtung: Die Summe aller Kantenlängen in diesem Kreis ist 60 – denn ein Zug braucht genau 60 Minuten, bis er wieder an der gleichen Stelle ist.

Ergebnis der mathematischen Modellierung

Taktfahrplan für eine Linie

Ein **Taktfahrplan** einer Linie im 10-Minuten-Takt lässt sich als ein gerichteter Kreis mit Knotenbeschriftungen in $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ und Kantenlängen in $\mathbb{N}_0$ darstellen, sodass die Länge einer Kante von Knoten v nach Knoten w bei Division durch 10 den gleichen Rest lässt wie die Differenz der Knotenbeschriftungen an w und v.

Ergebnis der mathematischen Modellierung

Taktfahrplan für eine Linie

Ein **Taktfahrplan** einer Linie im 10-Minuten-Takt lässt sich als ein gerichteter Kreis mit Knotenbeschriftungen in $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ und Kantenlängen in $\mathbb{N}_0$ darstellen, sodass die Länge einer Kante von Knoten v nach Knoten w bei Division durch 10 den gleichen Rest lässt wie die Differenz der Knotenbeschriftungen an w und v.

Allgemeiner Taktfahrplan

Ein **allgemeiner Taktfahrplan** besteht aus vier Komponenten:

- einem gerichteten Graphen,
- einer Taktzeit $T \in \mathbb{N}$,
- einer Funktion f, die jedem Knoten v im Graphen eine Zahl $f(v) \in \{0, 1, 2, \dots, T-1\}$ zuordnet,
- einer Funktion ℓ, die jeder Kante von v nach w eine Länge $\ell(v, w)$ zuordnet, sodass $\ell(v, w)$ bei Division durch T den gleichen Rest lässt wie $f(w) - f(v)$.

Die wichtigste Eigenschaft von Taktfahrplänen

Die Kreisperiodizätseigenschaft

Angenommen, wir haben einen allgemeinen Taktfahrplan auf einem gerichteten Kreis mit den n Knoten $v_1, v_2, v_3, v_4, \dots, v_n, v_1$ gegeben.

Die wichtigste Eigenschaft von Taktfahrplänen

Die Kreisperiodizätseigenschaft

Angenommen, wir haben einen allgemeinen Taktfahrplan auf einem gerichteten Kreis mit den n Knoten $v_1, v_2, v_3, v_4, \ldots, v_n, v_1$ gegeben.
Die Summe der Kantenlängen der Kreiskanten ist dann

$$\ell(v_1, v_2) + \ell(v_2, v_3) + \ell(v_3, v_4) + \cdots + \ell(v_n, v_1)$$

Die wichtigste Eigenschaft von Taktfahrplänen

Die Kreisperiodizätseigenschaft

Angenommen, wir haben einen allgemeinen Taktfahrplan auf einem gerichteten Kreis mit den n Knoten $v_1, v_2, v_3, v_4, \ldots, v_n, v_1$ gegeben.
Die Summe der Kantenlängen der Kreiskanten ist dann

$$\ell(v_1, v_2) + \ell(v_2, v_3) + \ell(v_3, v_4) + \cdots + \ell(v_n, v_1)$$

und lässt bei Division durch T den gleichen Rest wie

$$f(v_2) - f(v_1) + f(v_3) - f(v_2) + f(v_4) - f(v_3) + \cdots + f(v_1) - f(v_n)$$

Die wichtigste Eigenschaft von Taktfahrplänen

Die Kreisperiodizätseigenschaft

Angenommen, wir haben einen allgemeinen Taktfahrplan auf einem gerichteten Kreis mit den n Knoten $v_1, v_2, v_3, v_4, \dots, v_n, v_1$ gegeben.
Die Summe der Kantenlängen der Kreiskanten ist dann

$$\ell(v_1, v_2) + \ell(v_2, v_3) + \ell(v_3, v_4) + \cdots + \ell(v_n, v_1)$$

und lässt bei Division durch T den gleichen Rest wie

$$f(v_2) - f(v_1) + f(v_3) - f(v_2) + f(v_4) - f(v_3) + \cdots + f(v_1) - f(v_n) = 0.$$

Die wichtigste Eigenschaft von Taktfahrplänen

Die Kreisperiodizätseigenschaft

Angenommen, wir haben einen allgemeinen Taktfahrplan auf einem gerichteten Kreis mit den n Knoten $v_1, v_2, v_3, v_4, \ldots, v_n, v_1$ gegeben.
Die Summe der Kantenlängen der Kreiskanten ist dann

$$\ell(v_1, v_2) + \ell(v_2, v_3) + \ell(v_3, v_4) + \cdots + \ell(v_n, v_1)$$

und lässt bei Division durch T den gleichen Rest wie

$$f(v_2) - f(v_1) + f(v_3) - f(v_2) + f(v_4) - f(v_3) + \cdots + f(v_1) - f(v_n) = 0.$$

Denn in jedem gerichteten Kreis ist jeder Knoten genau einmal Start und Ziel einer Kante. Das heißt: Die Summe aller Kantenlängen ist immer ein ganzzahliges Vielfaches der Taktzeit T. In unserem Beispiel ist das $60 = 6 \cdot 10$.

Die wichtigste Eigenschaft von Taktfahrplänen

Die Kreisperiodizätseigenschaft

Angenommen, wir haben einen allgemeinen Taktfahrplan auf einem gerichteten Kreis mit den n Knoten $v_1, v_2, v_3, v_4, \ldots, v_n, v_1$ gegeben.
Die Summe der Kantenlängen der Kreiskanten ist dann

$$\ell(v_1, v_2) + \ell(v_2, v_3) + \ell(v_3, v_4) + \cdots + \ell(v_n, v_1)$$

und lässt bei Division durch T den gleichen Rest wie

$$f(v_2) - f(v_1) + f(v_3) - f(v_2) + f(v_4) - f(v_3) + \cdots + f(v_1) - f(v_n) = 0.$$

Denn in jedem gerichteten Kreis ist jeder Knoten genau einmal Start und Ziel einer Kante. Das heißt: Die Summe aller Kantenlängen ist immer ein ganzzahliges Vielfaches der Taktzeit T. In unserem Beispiel ist das $60 = 6 \cdot 10$.

Anzahl der benötigten Züge

Das angesprochene ganzzahlige Vielfache hat eine Bedeutung: Es ist die **Anzahl der Züge**, die für den Betrieb der Linie benötigt werden. Klar: Wenn der Kreis 60 Minuten lang ist und Züge alle 10 Minuten fahren sollen, dann werden 6 Züge benötigt.

Fahrplanung

In der Praxis ist die Aufgabe natürlich umgekehrt: Ein gerichteter Graph ist gegeben und es wird ein Taktfahrplan gesucht, der bestimmte *Bedingungen* erfüllt: Jede Kante hat eine gewisse **Mindestlänge** und **Höchstlänge**.
Z. B. muss eine Wendekante bei der Berliner S-Bahn mindestens 4 Minuten lang sein, damit der Lokführer eine kurze Pause und auch genug Zeit hat um zum anderen Ende des Zuges zu laufen.

Berechnung von Fahrplänen

Fahrplanung

In der Praxis ist die Aufgabe natürlich umgekehrt: Ein gerichteter Graph ist gegeben und es wird ein Taktfahrplan gesucht, der bestimmte *Bedingungen* erfüllt: Jede Kante hat eine gewisse **Mindestlänge** und **Höchstlänge**.
Z. B. muss eine Wendekante bei der Berliner S-Bahn mindestens 4 Minuten lang sein, damit der Lokführer eine kurze Pause und auch genug Zeit hat um zum anderen Ende des Zuges zu laufen.

Mathematischer Satz (Serafini und Ukovich, 1989)

Zu entscheiden, ob es in einem gegebenen gerichteten Graphen mit Mindest- und Höchstlängen der Kanten überhaupt einen passenden Taktfahrplan gibt, ist ein **NP-schweres Problem**.

Berechnung von Fahrplänen

Fahrplanung

In der Praxis ist die Aufgabe natürlich umgekehrt: Ein gerichteter Graph ist gegeben und es wird ein Taktfahrplan gesucht, der bestimmte *Bedingungen* erfüllt: Jede Kante hat eine gewisse **Mindestlänge** und **Höchstlänge**.
Z. B. muss eine Wendekante bei der Berliner S-Bahn mindestens 4 Minuten lang sein, damit der Lokführer eine kurze Pause und auch genug Zeit hat um zum anderen Ende des Zuges zu laufen.

Mathematischer Satz (Serafini und Ukovich, 1989)

Zu entscheiden, ob es in einem gegebenen gerichteten Graphen mit Mindest- und Höchstlängen der Kanten überhaupt einen passenden Taktfahrplan gibt, ist ein **NP-schweres Problem**.

Was heißt das nun schon wieder?

Das heißt, dass es höchstwahrscheinlich keine „wirklich effiziente" Methode gibt, überhaupt an einen Taktfahrplan zu kommen. Wer dies oder das Gegenteil beweist, bekommt 1 Million US-Dollar für die Lösung des **Millenium-Problems** $P \stackrel{?}{=} NP$.

Gute Fahrpläne

Ist das nicht frustrierend?

Obwohl es eine Methode, die in allen Fällen schnell Taktfahrpläne berechnet, höchstwahrscheinlich nicht gibt, muss man den Kopf nicht in den Sand stecken: In konkreten Anwendungsfällen lässt sich mit Methoden der **kombinatorischen Optimierung** viel erreichen.

Gute Fahrpläne

Ist das nicht frustrierend?

Obwohl es eine Methode, die in allen Fällen schnell Taktfahrpläne berechnet, höchstwahrscheinlich nicht gibt, muss man den Kopf nicht in den Sand stecken: In konkreten Anwendungsfällen lässt sich mit Methoden der **kombinatorischen Optimierung** viel erreichen.

Fahrplanoptimierung

Frage: Was macht einen *guten* Fahrplan aus?

Gute Fahrpläne

Ist das nicht frustrierend?

Obwohl es eine Methode, die in allen Fällen schnell Taktfahrpläne berechnet, höchstwahrscheinlich nicht gibt, muss man den Kopf nicht in den Sand stecken: In konkreten Anwendungsfällen lässt sich mit Methoden der **kombinatorischen Optimierung** viel erreichen.

Fahrplanoptimierung

Frage: Was macht einen *guten* Fahrplan aus?

Antwort: Für Fahrgäste ist ein Fahrplan umso besser, je kürzer die Reisezeiten sind.

Gute Fahrpläne

Ist das nicht frustrierend?

Obwohl es eine Methode, die in allen Fällen schnell Taktfahrpläne berechnet, höchstwahrscheinlich nicht gibt, muss man den Kopf nicht in den Sand stecken: In konkreten Anwendungsfällen lässt sich mit Methoden der **kombinatorischen Optimierung** viel erreichen.

Fahrplanoptimierung

Frage: Was macht einen *guten* Fahrplan aus?

Antwort: Für Fahrgäste ist ein Fahrplan umso besser, je kürzer die Reisezeiten sind.

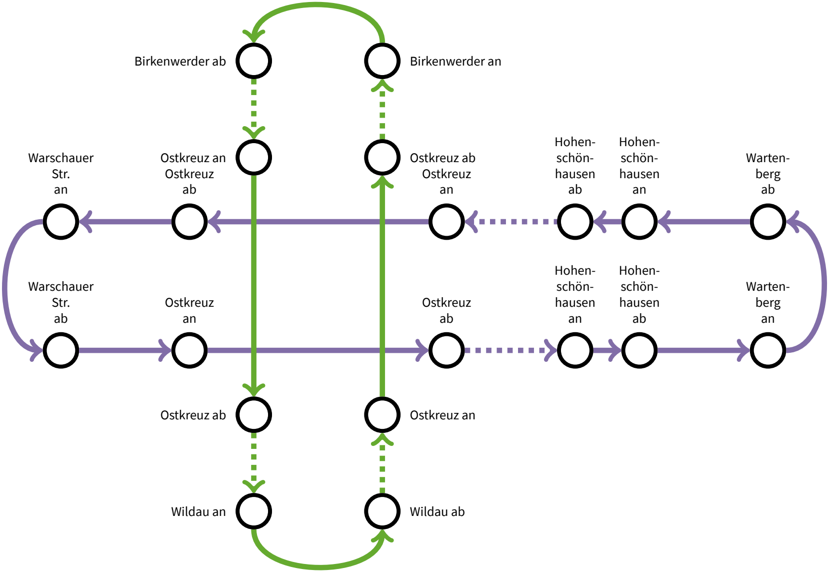
Umstiege

Das größte Potenzial für Fahrplanoptimierung liegt bei kurzen Umsteigezeiten. Doch dafür brauchen wir sinnvollerweise mehr als eine Linie...

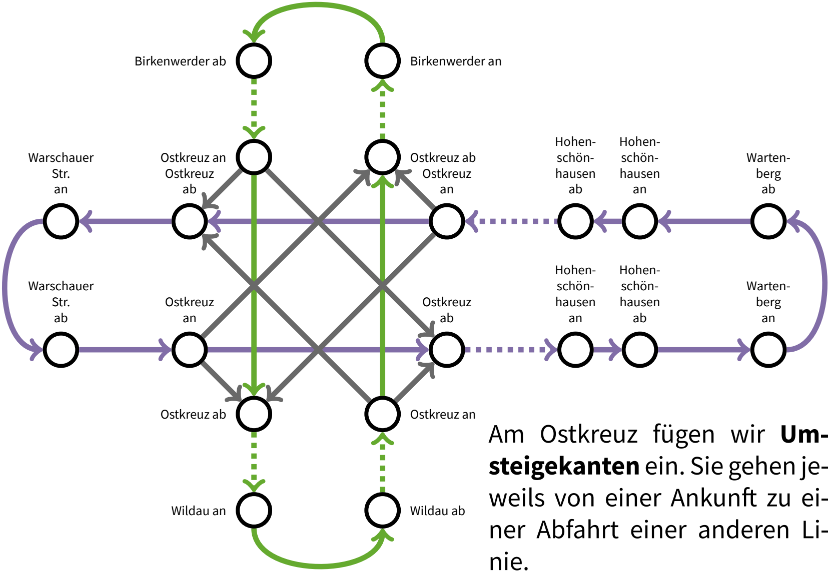
Zwei Linien – S75 und S8 auf dem Streckennetz

Betrachten wir zusätzlich zur S75 noch die Linie S8. Beide Linien treffen sich an der Station Ostkreuz.

Zwei Linien – Fahrplanungsgraph für S75 und S8



Zwei Linien – Fahrplanungsgraph für S75 und S8



Am Ostkreuz fügen wir **Umsteigekanten** ein. Sie gehen jeweils von einer Ankunft zu einer Abfahrt einer anderen Linie.

Taktfahrplanoptimierung

Taktfahrplanoptimierung

Mindestlängen für Umsteigekanten

Auch für Umsteigekanten gibt es Mindestlängen (**Mindestumsteigezeiten**), die vom Umsteigeweg abhängen. Für die Station Ostkreuz sind z. B. 2 Minuten Mindestumsteigezeit realistisch.

Taktfahrplanoptimierung

Mindestlängen für Umsteigekanten

Auch für Umsteigekanten gibt es Mindestlängen (**Mindestumsteigezeiten**), die vom Umsteigeweg abhängen. Für die Station Ostkreuz sind z. B. 2 Minuten Mindestumsteigezeit realistisch.

Allgemeines Taktfahrplanoptimierungsproblem

Gegeben einen gerichteten Graphen, finde einen allgemeinen Taktfahrplan, sodass die Mindest- und Höchstlängen eingehalten werden und die Summe der Kantenlängen möglichst klein ist!

Taktfahrplanoptimierung

Mindestlängen für Umsteigekanten

Auch für Umsteigekanten gibt es Mindestlängen (**Mindestumsteigezeiten**), die vom Umsteigeweg abhängen. Für die Station Ostkreuz sind z. B. 2 Minuten Mindestumsteigezeit realistisch.

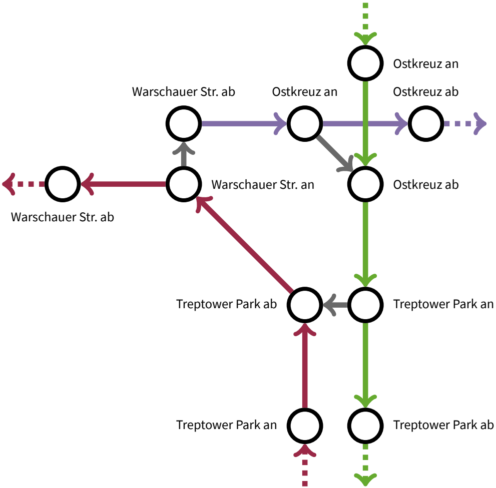
Allgemeines Taktfahrplanoptimierungsproblem

Gegeben einen gerichteten Graphen, finde einen allgemeinen Taktfahrplan, sodass die Mindest- und Höchstlängen eingehalten werden und die Summe der Kantenlängen möglichst klein ist!

Naive Idee

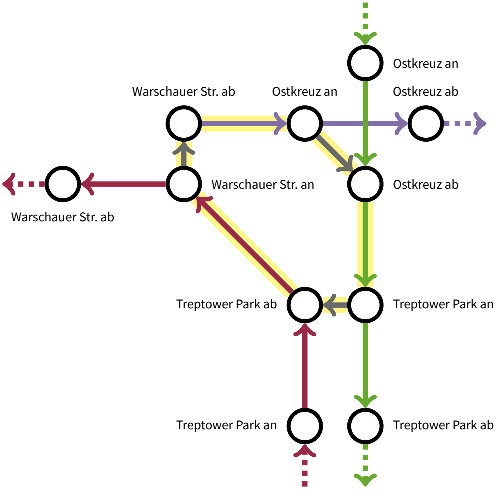
Können wir einen Fahrplan konstruieren, der beim Umsteigen keine Zeit verschwendet? Das heißt, schaffen wir es, dass die Kantenlängen immer genau der Mindestumsteigezeit entsprechen?

Umsteigen ohne Warten?



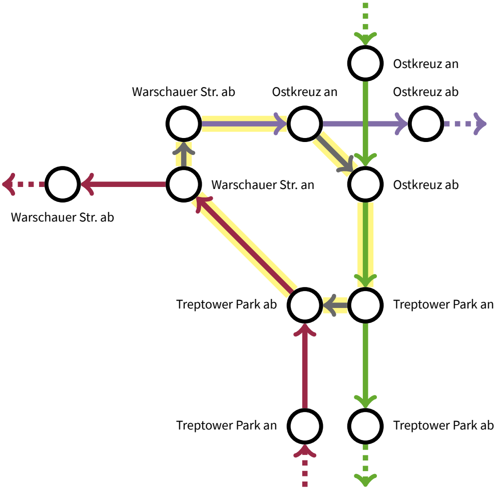
Nehmen wir noch eine dritte Linie hinzu, die S9. Im Fahrplanungsgraphen bildet sich ein gerichteter Kreis aus drei Umsteigekanten und drei Fahrtkanten.

Umsteigen ohne Warten?



Nehmen wir noch eine dritte Linie hinzu, die S9. Im Fahrplanungsgraphen bildet sich ein gerichteter Kreis aus drei Umsteigekanten und drei Fahrtkanten.

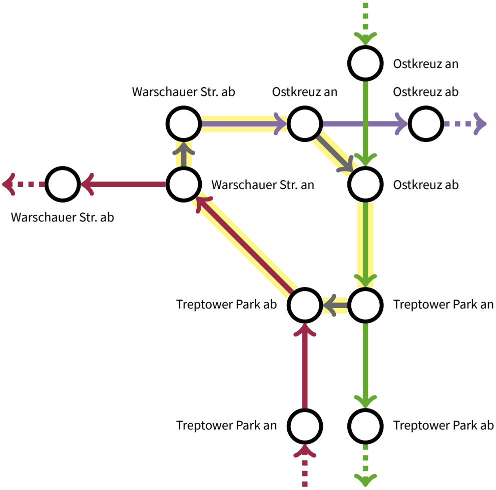
Umsteigen ohne Warten?



Nehmen wir noch eine dritte Linie hinzu, die S9. Im Fahrplanungsgraphen bildet sich ein gerichteter Kreis aus drei Umsteigekanten und drei Fahrtkanten.

Auch für diesen Kreis gilt die Kreisperiodizitätseigenschaft: Bei einem 10-Minuten-Takt muss die Summe der Kantenlänge ein Vielfaches von 10 ergeben.

Umsteigen ohne Warten?



Nehmen wir noch eine dritte Linie hinzu, die S9. Im Fahrplanungsgraphen bildet sich ein gerichteter Kreis aus drei Umsteigekanten und drei Fahrtkanten.

Auch für diesen Kreis gilt die Kreisperiodizitätseigenschaft: Bei einem 10-Minuten-Takt muss die Summe der Kantenlänge ein Vielfaches von 10 ergeben.

Wenn alle drei Umsteigekanten die Mindestumsteigezeit von 2 Minuten bieten sollen, muss die Summe der Fahrzeiten der drei Fahrtkanten also 4, 14, ... Minuten betragen. In der Praxis sind die Fahrzeiten jeweils ca. 2 Minuten. Das passt nicht zusammen!

Mehr zu Taktfahrplanoptimierung

Warum ist Taktfahrplanoptimierung eigentlich schwer?

Mehr zu Taktfahrplanoptimierung

Warum ist Taktfahrplanoptimierung eigentlich schwer?

- Bei *allen* Kreisen muss die Summe der Kantenlängen ein Vielfaches der Taktzeit ergeben.

Mehr zu Taktfahrplanoptimierung

Warum ist Taktfahrplanoptimierung eigentlich schwer?

- Bei *allen* Kreisen muss die Summe der Kantenlängen ein Vielfaches der Taktzeit ergeben.
- **Kombinatorische Explosion:** Die Anzahl der Kreise in einem Graphen kann exponentiell in der Anzahl der Knoten sein: Ein gerichteter Graph mit 10 Knoten kann über eine Million gerichtete Kreise haben!

Mehr zu Taktfahrplanoptimierung

Warum ist Taktfahrplanoptimierung eigentlich schwer?

- Bei *allen* Kreisen muss die Summe der Kantenlängen ein Vielfaches der Taktzeit ergeben.
- **Kombinatorische Explosion:** Die Anzahl der Kreise in einem Graphen kann exponentiell in der Anzahl der Knoten sein: Ein gerichteter Graph mit 10 Knoten kann über eine Million gerichtete Kreise haben!
- **Globalität:** Kreise können sehr lang sein. Ändert man an einer Stelle Umsteigezeiten, kann das ganz woanders Auswirkungen haben.

Mehr zu Taktfahrplanoptimierung

Warum ist Taktfahrplanoptimierung eigentlich schwer?

- Bei *allen* Kreisen muss die Summe der Kantenlängen ein Vielfaches der Taktzeit ergeben.
- **Kombinatorische Explosion:** Die Anzahl der Kreise in einem Graphen kann exponentiell in der Anzahl der Knoten sein: Ein gerichteter Graph mit 10 Knoten kann über eine Million gerichtete Kreise haben!
- **Globalität:** Kreise können sehr lang sein. Ändert man an einer Stelle Umsteigezeiten, kann das ganz woanders Auswirkungen haben.

Praxis

Den wirklich besten Fahrplan zu finden ist auch für Mathematiker:innen und Supercomputer eine Herausforderung.

Der Fahrplan 2005 der Berliner U-Bahn wurde mit mathematischen Methoden optimiert. Dabei ist die Umsteigezeit an vielen Stationen kürzer geworden und sogar ein Zug konnte eingespart werden.

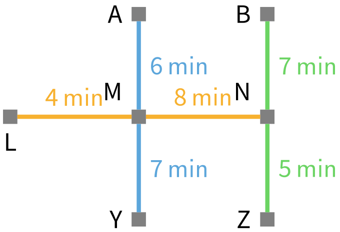
Taktfahrplanoptimierung zum Selbermachen

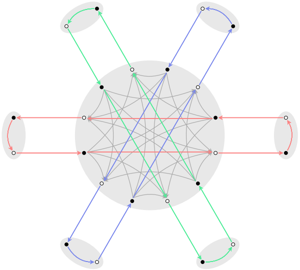
Könnt ihr einen möglichst guten Taktfahrplan finden?

➡ `https://www.zib.de/lindner/tdm22/pesp.html`

Hierbei müssen folgende Regeln beachtet werden:

- Umstiege dauern mindestens 2 Minuten.
- Die Fahrtdauer zwischen zwei Stationen muss genau so lang sein wie im Liniennetz rechts.
- Das Halten der Züge muss mindestens 1 Minute, aber maximal 5 Minuten in jeder Station betragen.
- Das Wenden muss in 3-5 Minuten erfolgen.





Umsteigen ohne Warten?

Mathematische Fahrplanoptimierung

Dr. Niels Lindner

Freie Universität Berlin & Zuse-Institut Berlin

Mathenacht aus Berlin, Bonn und Münster

02.12.2022