

Theorie zufälliger Matrizen

Susanna Röblitz (geb. Kube)

Disputationsvortrag

Berlin, 17. Dezember 2008



Freie Universität



Berlin

1,000,000 \$



Kernphysik

Multivariate Statistik

1,000,000 \$

Zufallsmatrizen

Kernphysik

Multivariate Statistik

Zufallsmatrix: Einträge sind **Zufallsvariablen**

gegeben

gesucht

Verteilung der Matrix A

Verteilung von $f(A)$
(z.B. Eigenwerte, Eigenvektoren)
für $N \rightarrow \infty$

Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \mathcal{H} \psi$$

Atomkern (Neutronenwechselwirkung): \mathcal{H} oft unbekannt oder zu komplex

$\mathcal{H} \longrightarrow H$ zufällige hermitesche Matrix

Hypothese: Die charakteristischen Energien eines chaotischen Systems verhalten sich lokal wie die Eigenwerte einer Zufallsmatrix.

[E.P. Wigner(1951), C.E. Porter, N. Rosenzweig (1960), F. Dyson (1962)]

$A = [x_1, \dots, x_n]$ Stichprobe aus $X \sim N_m(\mu, \Sigma)$

empirische Kovarianz-Matrix

$$S = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})^\top, \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$(n-1)S = ZZ^\top \sim W_m(n-1, \Sigma) \quad [\text{J. Wishart (1928)}]$$

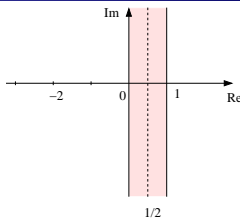
Anwendungsbeispiel: Hauptkomponentenanalyse

Eigenwertverteilung?

Riemannsche Zeta-Funktion

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{1 - 1/p^s}$$

$$s \in \mathbb{C}, \Re(s) > 1$$



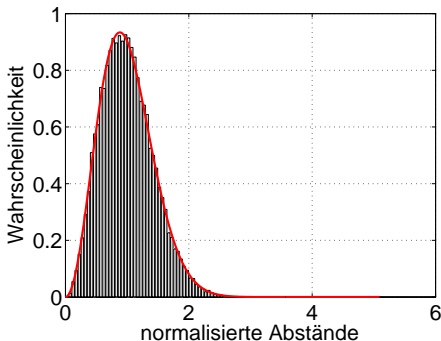
Nullstellen geben Auskunft über Verteilung der Primzahlen!

Riemannsche Vermutung (1859, Hilbert 1900): Nullstellen im kritischen Streifen liegen auf Geraden $\{s \mid \Re(s) = 1/2\}$

Hilbert-Pólya-Vermutung: Die Nullstellen der Riemannschen Zeta-Funktion entsprechen den Eigenwerten des Operators

$$\frac{1}{2} + iT, \quad T \text{ hermitesch}$$

Wahrscheinlichkeitsdichte der Abstände der Nullstellen der Riemannschen Zeta-Funktion (30000 Nullstellen, $n \approx 10^{12}, 10^{21}, 10^{22}$)



http://www.dtc.umn.edu/~odlyzko/zeta_tables/index.html

- ▶ lineare Gleichungssysteme
- ▶ zufällige Graphen
- ▶ Datenkomprimierung (*compressed sensing*)
- ▶ Quantenfeldtheorie
- ▶ ...

1. Welche Zufallsmatrizen gibt es?
2. Was möchte man darüber wissen?
3. Wie bekommt man diese Informationen?

Hermite (Gauß)	Laguerre (Wishart)	Jacobi (MANOVA)
$H = (A + A')/2$	$W = A'A$	$J = A/(A + B)$
$A \sim G_\beta(n, n)$	$A \sim G_\beta(m, n)$	$A \sim W_\beta(m_1, n)$ $B \sim W_\beta(m_2, n)$

- ▶ Abstände benachbarter Eigenwerte
- ▶ Abstand zwischen k Eigenwerten
- ▶ mittlere Anzahl von Eigenwerten in einem fixen Intervall
- ▶ Verteilung des größten/kleinsten Eigenwertes
- ▶ ...

Wie kann man diese Statistiken bestimmen?

1. Matrixverteilung wählen
2. Stichprobe ziehen ($N \times N$ Matrix A generieren)
3. Eigenwert berechnen
4. Statistik aufstellen

Problem: sehr zeitaufwändig für große N

Ziel: effiziente Berechnung

Drei Schritte zum Erfolg

1. dünn besetztes Matrixmodell
2. Skalierung der Matrix
3. Vernachlässigen kleiner Einträge (cutoff)

Werkzeugkasten

- ▶ numerische lineare Algebra
- ▶ orthogonale Polynome
- ▶ Differentialoperatoren

Hermite-Ensemble = Gaußsches Ensemble

$$H^\beta = (A + A')/2, \quad A \sim G_\beta(n, n)$$

Name	β	Eigenschaft	Invarianz
orthogonal (GOE)	1 (\mathbb{R})	symmetrisch	$A \rightarrow Q^T A Q$
unitär (GUE)	2 (\mathbb{C})	hermitesch	$A \rightarrow U^H A U$
symplektisch (GSE)	4 (\mathbb{H})	selbst-dual	$A \rightarrow S^D A S$

z.B. GUE: $A = \text{randn}(N) + i * \text{randn}(N)$; $H = (A + A') / 2$;

Hermiteches Polynom:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \pi_m^H(x) \pi_n^H(x) e^{-x^2} dx = \delta_{mn}$$

Hermiteche Funktion:

$$\psi_n^H(x) = \pi_n^H(x) e^{-x^2/2}$$

Drei-Term-Rekursion:

$$x \psi_n^H(x) = \sqrt{\frac{n}{2}} \psi_{n-1}^H(x) + \sqrt{\frac{n+1}{2}} \psi_{n+1}^H(x)$$

Seien z_1, \dots, z_N die Nullstellen von π_N^H .

$$\text{diag}(z_1, \dots, z_N) [\Psi_{j-1}^H(z_i)]_{i,j=1, \dots, N} = [\Psi_{j-1}^H(z_i)]_{i,j=1, \dots, N} F H_N^\infty F$$

$$F = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & \end{pmatrix}$$

$$H_N^\infty = Q \Lambda Q^\top, \quad \Lambda = \text{diag}(z_1, \dots, z_N), \quad Q_{ij} = \frac{\Psi_{N-i}^H(z_j)}{\sqrt{K_{N-1}^H(z_j, z_j)}}$$

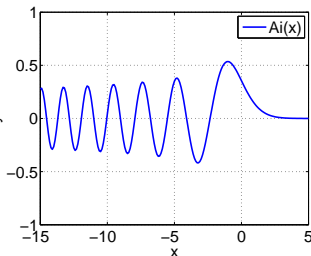
Eigenwerte von $H_N^\infty =$ **Nullstellen** des Hermite-Polynoms π_N^H

Problem: Nullstellen sind **unbeschränkt** für $N \rightarrow \infty$

Airy-Funktion:

$$Ai(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) dt$$

Nullstellen $0 > \xi_1 > \xi_2 \dots$



[Szegő (1939)]

$$z_{N,k} \sim -\sqrt{2N} - \frac{1}{\sqrt{2}} N^{-1/6} \xi_k, \quad z_{N,N+1-k} \sim \sqrt{2N} + \frac{1}{\sqrt{2}} N^{-1/6} \xi_k$$

Um einen Grenzwert bilden zu können, muss man **shiften** und **skalieren**.

$$\tilde{H}_N^\infty = \sqrt{2}N^{1/6}(H_N^\infty - \sqrt{2N}I_N)$$

Setze $h = N^{-1/3}$, $x_k = hk$ ($k = 1, \dots, N$):

\tilde{H}_N^∞ ist Finite-Differenzen-Approximation an den **Airy-Operator**

$$\mathcal{A}^\infty = \frac{d^2}{dx^2} - x \text{ auf } [0, \infty), \quad \text{RB: } f(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

Eigenwertzerlegung:

$$\mathcal{A}^\infty[\text{Ai}(x + \xi_k)] = \xi_k[\text{Ai}(x + \xi_k)], \quad 0 > \xi_1 > \xi_2 > \dots \text{ NST von Ai}$$

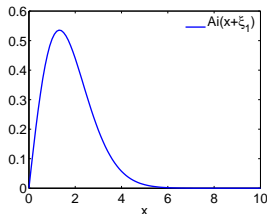
Die **Eigenvektoren** von \tilde{H}_N^∞ sind diskretisierte **Airy-Funktionen**:

$$\tilde{H}_N^\infty v_i = \lambda_i v_i, \quad \lambda_i = \xi_i, \quad v_i(k) = \text{Ai}(x_k + \xi_i), \quad x_k = kh \quad (k = 1, \dots, N)$$

Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = \xi_1 \approx -2.34$

$$v_1(k) = Ai(x_k + \xi_1),$$

$$x_k = kh \quad (k = 1, \dots, N)$$



cutoff: Bestimme den Index k , so dass

$$v(i) < \varepsilon \quad \forall i > k \quad \leftrightarrow \quad Ai(x_i + \xi_1) < \varepsilon \quad \forall i > k$$

wähle $\varepsilon = 2^{-52}$: $hk = x_k < 16 \leftrightarrow k < 16/h = 16N^{1/3}$

$$\beta < \infty$$

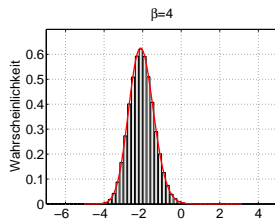
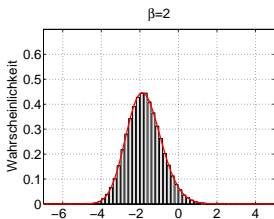
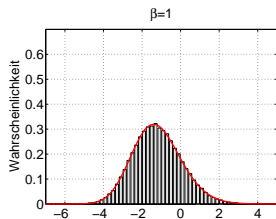
$$H_N^\beta \sim H_N^\infty + \frac{1}{2\sqrt{\beta}} \begin{pmatrix} 2G & G & & & \\ G & 2G & G & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & G & 2G & G \\ & & & G & 2G \end{pmatrix}, \quad \beta > 0$$

$\tilde{H}_N^\beta = \sqrt{2}N^{1/6}(H_N^\beta - \sqrt{2N}I_N)$ ist Finite-Differenzen-Approximation an den **stochastischen** Airy-Operator

$$\mathcal{A}^\beta = \frac{d^2}{dx^2} - x + \frac{2}{\sqrt{\beta}}dW \text{ auf } [0, \infty), \quad \text{RB: } f(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

Behauptung: Die Verteilung des größten Eigenwertes von \mathcal{A}^β entspricht der Verteilung des größten Eigenwertes von \tilde{H}_N^β

Histogramme der Wahrscheinlichkeitsdichten des skalierten größten Eigenwertes (10^5 Wiederholungen, $N = 10^9$)



Berechnung des größten Eigenwertes (1 Durchlauf)

Laufzeit in Sekunden (1 CPU, Opteron Prozessor, 2.2 MHz)

	Komplexität	$N = 10^4$	$N = 10^6$	$N = 10^9$	$N = 10^{12}$
vollbesetzt	$\mathcal{O}(N^3)$	180	-(*)	-	-
tridiagonal	$\mathcal{O}(N)$	0.01	1.1	1200	-
cutoff	$\mathcal{O}(N^{1/3})$	0.0005	0.001	0.01	0.12

(*) out of memory

- ▶ tridiagonales Matrixmodell
- ▶ Verallgemeinerung des Ensembles auf $\beta > 0$
- ▶ Grenzwert $N \rightarrow \infty$ nur bei geeigneter Skalierung der Matrix
- ▶ Finite-Differenzen-Approximation an stochastischen Operator

offene Probleme

- ▶ analytische Resultate für das Laguerre- und Jacobi-Ensemble
- ▶ analytische Resultate für allgemeine $\beta > 0$
- ▶ stochastische Operatoren als möglicher neuer Zugang zur Riemanschen Vermutung

Einführung und Überblick:

- ▶ M. L. Mehta (2004), *Random Matrices*, Elsevier, Amsterdam.
- ▶ R. J. Muirhead (1982), *Aspects of Multivariate Statistical Theory*, John Wiley & Sons, New York.
- ▶ A. Edelman, N.R. Rao (2005), Random matrix theory, *Acta Numerica*, 1–65.

Stochastische Operatoren:

- ▶ I. Dumitriu, A. Edelman (2002), Matrix models for beta ensembles, *J. Math. Phys.*, 43(11), 5830–5847.
- ▶ B.D. Sutton (2005), *The Stochastic Operator Approach to Random Matrix Theory*, PhD thesis, MIT.
- ▶ A. Edelman, B.D. Sutton (2007), From Random Matrices to Stochastic Operators, *J. Statist. Phys.*, 127(6), 1121–1165.

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!