

**I. Babuška, R. Tempone, G.Zouraris:
Galerkin-FEM-Approximation stochastischer elliptischer partieller
Differentialgleichungen**

Susanna Kube

10.12.2003

Inhaltsverzeichnis

1	Voraussetzungen	4
2	Existenz und Eindeutigkeit der Lösung	6
3	Stetige Abhängigkeit von den Daten	9
4	FEM-Räume	13
4.1	Räumliche Diskretisierung	14
4.2	Stochastische Diskretisierung	15
4.3	Tensorprodukt FE-Raum, $k \times h$ -Version	15
5	Fehlerabschätzung bei der $k \times h$ - SGFEM-Methode	16
5.1	Abschätzung in der Energie-Norm	18

5.2	Konvergenzresultat	21
6	Fehlerabschätzung bei der $p \times h$ - SGFEM-Methode	22
7	Beispiele	23
7.1	Offene Fragen	26
8	Literatur	27

1 Voraussetzungen

$D \in \mathbb{R}^d$ beschränktes konvexes Polyeder
 (Ω, \mathcal{F}, P) Wahrscheinlichkeitsraum

Stochastisches lineares elliptisches Randwertproblem:

Gesucht ist eine stochastische Funktion $u : \Omega \times \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$, so dass P -fast sicher gilt:

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (a(\omega, \cdot) \nabla u(\omega, \cdot)) &= f(\omega, \cdot), \text{ auf } D, \\ u(\omega, \cdot) &= 0, \text{ auf } \partial D \end{aligned} \tag{1}$$

Wir stellen folgende Voraussetzungen an die Zufallsfelder $a, f : \Omega \times D \rightarrow \mathbb{R}$:

a sei beschränkt und gleichmäßig koerziv:

$$\exists a_{\min}, a_{\max} \in (0, \infty) : P(\omega \in \Omega : a(\omega, x) \in [a_{\min}, a_{\max}], \forall x \in D) = 1 \quad (2)$$

a hat eine gleichmäßig beschränkte und stetige erste Ableitung:

$$\exists C \in \mathbb{R} : P(\omega \in \Omega : a(\omega, \cdot) \in C^1(\overline{D}) \text{ und } \max_{\overline{D}} |\nabla_x a(\omega, \cdot)| < C) = 1 \quad (3)$$

Für die rechte Seite gelte:

$$\|f\|_{\tilde{L}^2(D)}^2 = E[\|f\|_{L^2(D)}^2] = \int_{\Omega} \int_D f^2(\omega, x) dx dP(\omega) < \infty \quad (4)$$

2 Existenz und Eindeutigkeit der Lösung

Variationsraum:

Hilbertraum $\mathcal{H} = \tilde{H}_0^1(D) = L_P^2(\Omega, H_0^1(D)) \simeq L_P^2(\Omega) \otimes H_0^1(D)$ mit Innenprodukt

$$(v, w)_{\mathcal{H}} = E\left[\int_D \nabla v \cdot \nabla w dx\right]$$

Stochastische Variationsformulierung von (1):

Bestimme $u \in \mathcal{H}$, so dass

$$\mathcal{B}(u, v) = \mathcal{L}(v) \quad \forall v \in \mathcal{H}. \quad (5)$$

$$\mathcal{B}(v, w) = E\left[\int_D a \nabla v \cdot \nabla w dx\right]$$

- $\mathcal{B} : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ symmetrische Bilinearform

-

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}(v, w)| &\leq E\left[a_{\max} \left(\int_D |\nabla v|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_D |\nabla w|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\ &\leq a_{\max} \left(E\left[\int_D |\nabla v|^2 dx\right]\right)^{\frac{1}{2}} \left(E\left[\int_D |\nabla w|^2 dx\right]\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= a_{\max} \|v\|_{\mathcal{H}} \|w\|_{\mathcal{H}} \quad \text{Stetigkeit} \end{aligned}$$

-

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}(v, v)| &\geq E\left[a_{\min} \int_D |\nabla v|^2 dx\right] \\ &= a_{\min} \|v\|_{\mathcal{H}}^2 \quad \text{Koerzivitat} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}(v) = E\left[\int_D f v dx\right]$$

- $\mathcal{L} : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ lineares Funktional

-

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}(v)| &\leq E\left[\left(\int_D f^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_D v^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\ &\leq E\left[\int_D f^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} E\left[\int_D v^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \|v\|_{\mathcal{H}} \quad \text{Beschränktheit} \end{aligned}$$

Lax-Milgram-Lemma:

$$\exists! u \in \mathcal{H} \text{ so dass } \mathcal{B}(u, v) = \mathcal{L}(v) \quad \forall v \in \mathcal{H}$$

3 Stetige Abhängigkeit von den Daten

Sei $(\mathcal{H}, (\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}})$ ein Hilbertraum und $\mathcal{B}, \hat{\mathcal{B}} : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ zwei symmetrische Bilinearformen, die koerziv und beschränkt sind, d.h. es existieren zwei Konstanten $0 < a_{\min} \leq a_{\max}$, so dass

$$a_{\min} \|v\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \min\{\mathcal{B}(v, v), \hat{\mathcal{B}}(v, v)\}, \quad \forall v \in \mathcal{H},$$

$$\max\{|\mathcal{B}(v, w)|, |\hat{\mathcal{B}}(v, w)|\} \leq a_{\max} \|v\|_{\mathcal{H}} \|w\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall v, w \in \mathcal{H}.$$

Wir nehmen an, dass die beiden Bilinearformen vergleichbar sind, d.h., es gibt eine Konstante γ , so dass

$$|(\mathcal{B} - \hat{\mathcal{B}})(v, w)| \leq \gamma \|v\|_{\mathcal{H}} \|w\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall v, w \in \mathcal{H}.$$

Gegeben seien weiterhin die beiden beschränkten linearen Funktionale $\mathcal{L}, \hat{\mathcal{L}} \in \mathcal{H}'$ und Lösungen $u, \hat{u} \in \mathcal{H}$ von

$$\mathcal{B}(u, v) = \mathcal{L}(v), \quad \forall v \in \mathcal{H},$$

$$\hat{\mathcal{B}}(\hat{u}, v) = \hat{\mathcal{L}}(v), \quad \forall v \in \mathcal{H}.$$

Dann gilt

$$\|u - \hat{u}\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{1}{a_{\min}} (\|\mathcal{L} - \hat{\mathcal{L}}\|_{\mathcal{H}'} + \frac{\gamma}{a_{\min}} \|\hat{\mathcal{L}}\|_{\mathcal{H}'}). \quad (6)$$

Beweis

Bemerkung:

$$\|\mathcal{L}\|_{\mathcal{H}'} = \sup_{v \in \mathcal{H}, v \neq 0} \frac{|\mathcal{L}(v)|}{\|v\|_{\mathcal{H}}},$$

also insbesondere

$$(\mathcal{L} - \hat{\mathcal{L}})(e) \leq \|\mathcal{L} - \hat{\mathcal{L}}\|_{\mathcal{H}'} \|e\|_{\mathcal{H}}.$$

$$\begin{aligned} a_{\min} \|e\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \mathcal{B}(e, e) &= \mathcal{B}(e, u) - \mathcal{B}(e, \hat{u}) \\ &= \mathcal{L}(e) - \mathcal{B}(e, \hat{u}) \\ &= \mathcal{L}(e) + (\hat{\mathcal{B}} - \mathcal{B})(e, \hat{u}) - \hat{\mathcal{B}}(e, \hat{u}) \\ &= (\mathcal{L} - \hat{\mathcal{L}})(e) + (\hat{\mathcal{B}} - \mathcal{B})(e, \hat{u}) \\ &\leq (\|\mathcal{L} - \hat{\mathcal{L}}\|_{\mathcal{H}'} + \gamma \|\hat{u}\|_{\mathcal{H}}) \|e\|_{\mathcal{H}} \\ &\leq (\|\mathcal{L} - \hat{\mathcal{L}}\|_{\mathcal{H}'} + \frac{\gamma}{a_{\min}} \|\hat{\mathcal{L}}\|_{\mathcal{H}'}) \|e\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

$$(a_{\min} \|\hat{u}\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \hat{\mathcal{B}}(\hat{u}, \hat{u}) = \hat{\mathcal{L}}(\hat{u}) \leq \|\hat{\mathcal{L}}\|_{\mathcal{H}'} \|\hat{u}\|_{\mathcal{H}})$$

Die Anwendung des vorherigen Satzes liefert das folgende Konvergenzergbnis:

Betrachte zwei konvergente Folgen stochastischer Prozesse $\{a_n\}$, $\{f_n\}$ mit

$$0 < a_{\min} \leq a_n \leq a_{\max} < \infty, \quad (P \otimes dx) \text{ a.e. on } D \times \Omega, \quad \|a_n - a\|_{\tilde{L}^\infty(D)} \rightarrow 0$$

und

$$\|f_n - f\|_{\tilde{L}^2(D)} \rightarrow 0.$$

Dann erfüllen die Prozesse u und u_n , definiert durch

$$E\left[\int_D a_n \nabla u_n \cdot \nabla v dx\right] = E\left[\int_D f_n v dx\right], \quad \forall v \in \mathcal{H},$$

$$E\left[\int_D a \nabla u \cdot \nabla v dx\right] = E\left[\int_D f v dx\right], \quad \forall v \in \mathcal{H},$$

die Ungleichung

$$\|u - u_n\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{C_D}{a_{\min}} (\|f_n - f\|_{\tilde{L}^2(D)} + \frac{1}{a_{\min}} \|a_n - a\|_{\tilde{L}^\infty(D)} \|f\|_{\tilde{L}^2(D)}) \rightarrow 0.$$

4 FEM-Räume

Babuška:

- endliche Anzahl unabhängiger Zufallsvariablen Y_i mit Dichtefunktionen ρ_i in der KL-Entwicklung
- stückweise Polynome (k -Version) oder globale Polynome (p -Version) bei der stochastischen Diskretisierung

Deterministische Variationsformulierung: Bestimme $u \in L^2_\rho(\Gamma) \otimes H_0^1(D)$, so dass

$$\int_\Gamma \rho(y) \int_D a(y, x) \nabla u(y, x) \cdot \nabla v(y, x) dx dy = \int_\Gamma \rho(y) \int_D f(y, x) v(y, x) dx dy,$$
$$\forall v \in L^2_\rho(\Gamma) \otimes H_0^1(D).$$

(7)

4.1 Räumliche Diskretisierung

\mathcal{T}_h^d : Reguläre Triangulierung des konvexen Polyeders D in Simplices
mit (maximalem) Durchmesser $h > 0$

$X_h^d \subset H_0^1(D)$: Raum der stückweise linearen stetigen FE-Funktionen bezüglich \mathcal{T}_h^d

4.2 Stochastische Diskretisierung

$\Gamma_{j,N} \equiv Y_j(\Omega)$: beschränkte Intervalle in \mathbb{R}

Zerlege $\Gamma = \prod_{j=1}^N \Gamma_j$ in Teilquader $\gamma = \prod_{j=1}^N (a_j^\gamma, b_j^\gamma)$ mit $(a_j^\gamma, b_j^\gamma) \subseteq \Gamma_j$.

Gitterweite: $k_j \equiv \max_\gamma |b_j^\gamma - a_j^\gamma|$, $k = (k_1, \dots, k_N)$

$\mathcal{P}^{N,q} := \{ \text{Polynome vom Grad } \leq q \text{ in } N \text{ Variablen} \}$

$Y_k^{N,q} := \{ \psi \in L^2(\Gamma) : \psi|_\gamma \in \mathcal{P}^{N,q} \forall \gamma \}$

4.3 Tensorprodukt FE-Raum, $k \times h$ -Version

$$Y_k^{N,q} \otimes X_h^d = \{ v \in L^2(\Gamma \times D) : v \in \text{span}\{ \phi(x)\psi(y) : \phi \in X_h^d, \psi \in Y_k^{N,q} \} \}$$

5 Fehlerabschätzung bei der $k \times h$ - SGFEM-Methode

$$\min_{\xi \in X_h^d} \|v - \xi\|_{H_0^1(D)} \leq Ch \|v\|_{H^2(D)}, \quad \forall v \in H^2(D) \cap H_0^1(D)$$

$$\min_{\varphi \in Y_k^{N,q}} \|v - \varphi\|_{L^2(\Gamma)} \leq C \sum_{j=1}^N (k_j)^{q+1} \|\partial_{y_j}^{q+1} v\|_{L^2(\Gamma)}, \quad \forall v \in H^{q+1}(\Gamma)$$

⇒ (Beweis mittels Projektion)

$$\begin{aligned} & \inf_{\Psi \in Y_k^{N,q} \otimes X_h^d} \|v - \Psi\|_{L^2(\Gamma, H_0^1(D))} \leq \\ & C_{D,N,q} \left\{ h \|v\|_{L^2(\Gamma, H^2(D))} + \sum_{j=1}^N (k_j)^{q+1} \|\partial_{y_j}^{q+1} v\|_{L^2(\Gamma, H_0^1(D))} \right\} \quad (8) \\ & \forall v \in C^{q+1}(\Gamma, H^2(D) \cap H_0^1(D)) \end{aligned}$$

Annahme:

$$a \in C^{q+1,1}(\overline{\Gamma \times D}) \text{ und } f \in C^{q+1}(\Gamma, L^2(D))$$

\Rightarrow

$$u \in C^{q+1}(\Gamma, H^2(D) \cap H_0^1(D)),$$

elliptische Regularitätstheorie \Rightarrow

$$\|u(y, \cdot)\|_{H_0^1(D)} \leq \frac{C_D}{a_{\min}} \|f(y, \cdot)\|_{L_2(D)}, \quad \forall y \in \Gamma, \quad (9)$$

$$\|u(y, \cdot)\|_{H^2(D)} \leq C_{0,B} \|f(y, \cdot)\|_{L_2(D)}, \quad \forall y \in \Gamma, \quad (10)$$

$$\|\partial_{y_j}^{q+1} u(y, \cdot)\|_{H_0^1(D)}^2 \leq C_{q+1,B} \sum_{0 \leq \beta \leq q+1} \|\partial_{y_j}^\beta f(y, \cdot)\|_{L_2(D)}^2, \quad \forall y \in \Gamma, \quad 1 \leq j \leq N \quad (11)$$

$C_{q+1,B}$ ist abhängig von q , C_D und a .

5.1 Abschätzung in der Energie-Norm

$$\mathcal{B}(e, e)^{\frac{1}{2}} \leq C \sqrt{\|a\rho\|_{L^\infty(\Gamma \times D)}}$$

$$\left(h \|f\|_{L^2(\Gamma, L^2(D))} + \sum_{j=1}^N (k_j)^{q+1} \sqrt{\sum_{0 \leq \beta \leq q+1} \|\partial_{y_j}^\beta f(y, \cdot)\|_{L^2(\Gamma, L^2(D))}^2} \right)$$

C ist abhängig von q , D , Γ und a , aber unabhängig von k , h und u .

Beweis

Sei $V_{kh} = Y_k^{N,q} \otimes X_h^d$ und $e = u - u_{kh}$. Es gilt die übliche Galerkin-Orthogonalität:

$$\mathcal{B}(e, \psi) = \int_{\Gamma} \rho (a \nabla_x e, \nabla_x \psi)_{L^2(D)} dy = 0, \quad \forall \psi \in V_{kh}$$

Wegen

$$\mathcal{B}(u - \psi, u - \psi) = \mathcal{B}(e + (u_{kh} - \psi), e + (u_{kh} - \psi)) = \mathcal{B}(e, e) + \mathcal{B}(u_{kh} - \psi, u_{kh} - \psi)$$

erhält man:

$$\begin{aligned} (\mathcal{B}(e, e))^{\frac{1}{2}} &\leq \inf_{\psi \in V_{kh}} (\mathcal{B}(u - \psi, u - \psi))^{\frac{1}{2}} \\ &= \inf_{\psi \in V_{kh}} \left(\int_{\Gamma} \rho \|\sqrt{a} \nabla_x (u - \psi)\|_{L^2(D)}^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|a\rho\|_{L^\infty(\Gamma \times D)}^{\frac{1}{2}} \inf_{\psi \in V_{kh}} \|u - \psi\|_{L^2(\Gamma, H_0^1(D))} \end{aligned}$$

Die Abschätzung (8) liefert

$$(\mathcal{B}(e, e))^{\frac{1}{2}} \leq C \|a\rho\|_{L^\infty(\Gamma \times D)}^{\frac{1}{2}} \left(h \|u\|_{L^2(\Gamma, H^2(D))} + \sum_{j=1}^N (k_j)^{q+1} \|\partial_{y_j}^{q+1} u\|_{L^2(\Gamma, H_0^1(D))} \right).$$

Mit (10) und (11) ergibt sich die Behauptung.

5.2 Konvergenzresultat

- Fehler des Erwartungswertes in der H_0^1 -Norm:

$$\|E[u(Y, \cdot)] - E[u_{kh}(Y, \cdot)]\|_{H_0^1(D)} \leq C \left(h + \sum_{j=1}^N (k_j)^{q+1} \right)$$

- Fehler des Erwartungswertes in der L^2 -Norm:

$$\|E[u(Y, \cdot)] - E[u_{kh}(Y, \cdot)]\|_{L^2(D)} \leq C \left(h^2 + \sum_{j=1}^N (k_j)^{2(q+1)} \right)$$

C ist unabhängig von u , h und k .

6 Fehlerabschätzung bei der $p \times h$ - SGFEM-Methode

Wie bei der $k \times h$ -Version liefert auch die p -Version eine exponentielle Konvergenz bei der Abschätzung des Erwartungswertes der Lösung:

$$\|E[u - u_h^p]\|_{L^2(D)} \leq C \left(h^2 + \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^N (\|r_i\|_{L^\infty(\hat{\Gamma}_i)})^{2p_i+2} \right)$$

C ist unabhängig von u , h , p_i und r_i .

7 Beispiele

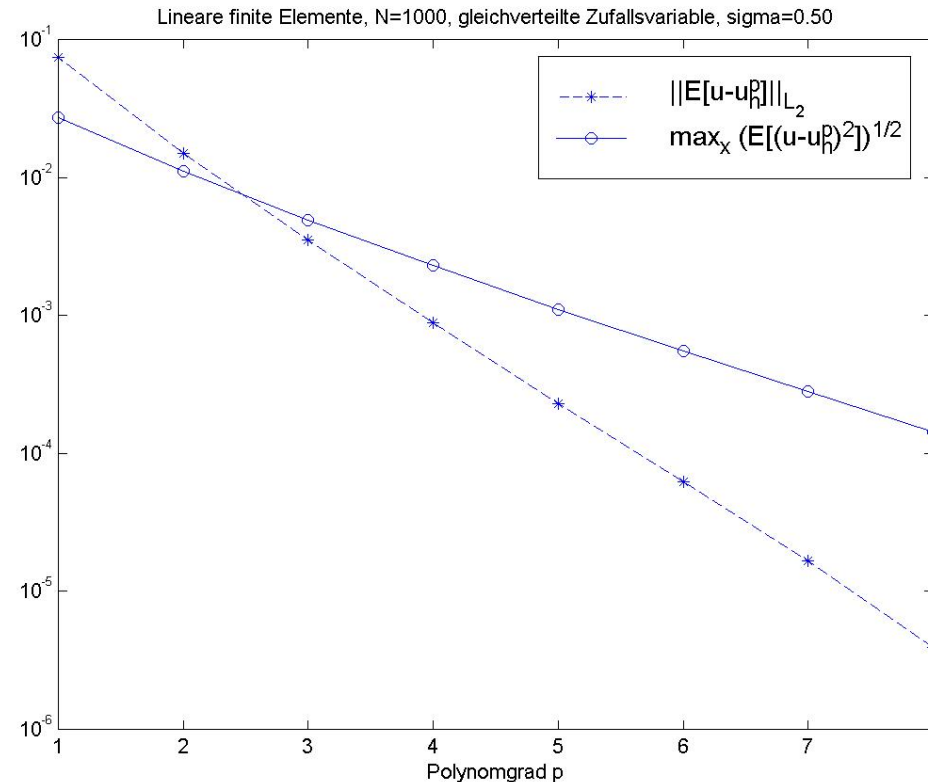


Abbildung 1: Konvergenzresultate für die Lösung des Problems $\frac{d}{dx} \left((1 + xY(\omega)) \frac{d}{dx} u(\omega, x) \right) = 0$ ($x \in D = [0, 1]$) mit den Randbedingungen $u(\omega, 0) = 0$, $u(\omega, 1) = 1$, $Y(\omega) \sim U[-\sqrt{3}\sigma, \sqrt{3}\sigma]$ ($\sigma = \text{Standardabweichung}$).

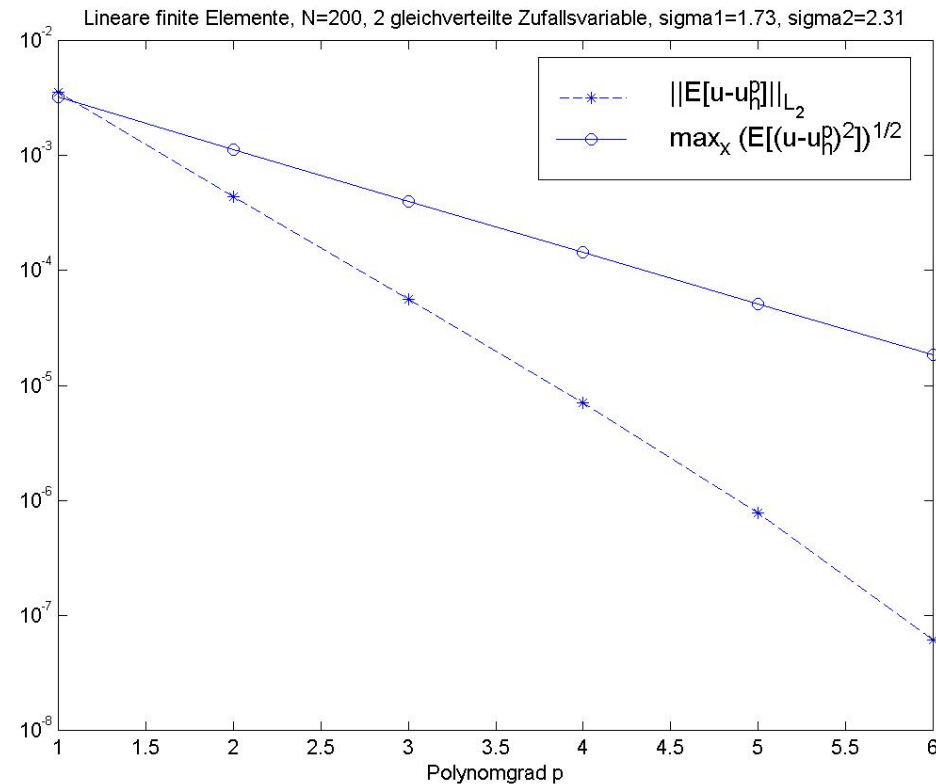


Abbildung 2: Konvergenzresultate für die Lösung des Problems $\frac{d}{dx} [(\alpha x + \beta) \frac{d}{dx} u(\alpha, \beta, x)] = 1$, ($x \in D = [0, 1]$) mit den Randbedingungen $u(\alpha, \beta, 0) = u(\alpha, \beta, 1) = 0$, $\alpha \sim U[0, 6]$, $\beta \sim U[2, 10]$.

7.1 Offene Fragen

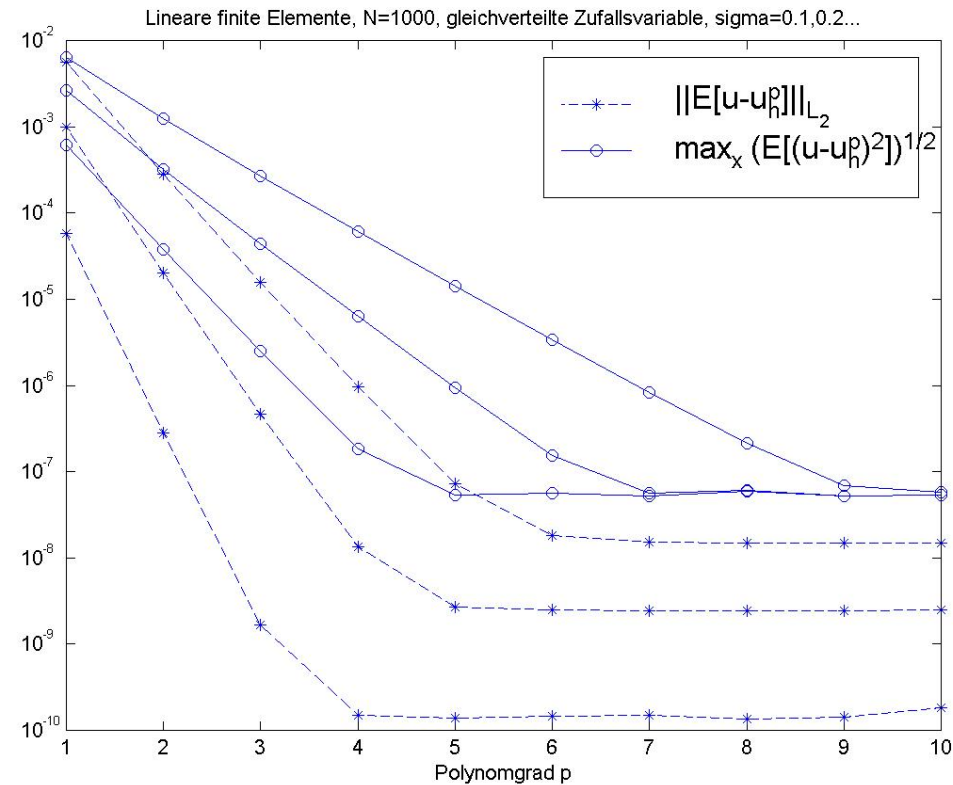


Abbildung 3: Abbruch der Konvergenzkurve für verschiedene Werte von σ

8 Literatur

- I. Babuška, R. Tempone, G.Zouraris: *Galerkin FEM-approximations of stochastic elliptic partial differential equations*, report, 07.11.2002