FU Berlin: SoSe 12 (Lineare Algebra und Analytische Geometrie I, Caiazzo/Weber)

Definitionen-Zettel Nr. 12: Affine Räume, affine Koordinaten und affine Abbildungen

---

Lernziel: Einführung in der affinen Geometrie

Definition 12.1: Sei $\mathcal{A}$ eine Menge und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Das Paar $(\mathcal{A}, V)$ (auch $\mathcal{A}(V)$) heißt **affiner Raum**, wenn eine Abbildung

$$\begin{aligned} + : \mathcal{A} \times V &\to \mathcal{A} \\ (P, \mathbf{v}) &\to P + \mathbf{v} \end{aligned}$$

existiert, so daß

i) $(P + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = P + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$, $\forall P \in , \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

ii) $\forall P, Q \in \mathcal{A}$, ein eindeutig bestimmter Vektor $\mathbf{v} \in V$ existiert, so daß

$$Q = P + \mathbf{v}\,.$$

Das Vektor $\mathbf{v}$ heißt der *Verbindungsvektor* von P und Q und wird mit $\overline{PQ}$ bezeichnet.

Wir sagen dann dass $\mathcal{A}(V)$ ist ein affiner Raum **über** V, und die Elemente von $\mathcal{A}$ werden dann **Punkte** genannt.

Manchmal sagt man daß $\mathcal{A}$ ein affiner Raum ist (und nicht $\mathcal{A}(V)$) wenn klar ist, welches der zugehorige Vektorraum sein soll. Dieser Vektorraum ist durch $\mathcal{A}$ eindeutig bestimmt, und besteht aus der Menge *aller Verbindungsvektoren* der Punkte aus $\mathcal{A}$.

Beispiel 1: Inhomogenen Gleichungssystemen. Seien A eine Matrix und $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$ ein gegeben Vektor. Sei I die Menge der Lösungen des *inhomogenes* LGS

$$\mathcal{A} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}\}\,.$$

bildet ein affinen Raum über $\ker(A)$. Die Verbindungsvektoren zwei Punkten in $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$ ist der Vektor $\mathbf{y} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \ker A$:

$$A\mathbf{y} = A(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \mathbf{0}\,.$$

Beispiel 2: Ebene und Gerade. Eine Ebene

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$$

ist ein affinen Raum über $\mathbb{R}^2$, und eine Gerade

$$a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 = d_1$$
$$a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = d_2$$

(mit $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_3 \neq 0$) ist ein affinen Räum über $\mathbb{R}$.

Verschiebungen. Sei $\mathcal{A}$ die Menge aller geometrischen Punkte einer Ebene und V der Vektorraum aller Verschiebungen der Ebene in sich. Wenn P ein Punkt und $\mathbf{v}$ eine Verschiebung ist, so definiert man $P + \mathbf{v}$ als das Ergebnis der Verschiebung $\mathbf{v}$ auf P. Mit dieser Definition von $+$ sind die Bedingungen **(i)** und **(ii)** erfüllt.

Definition 12.2: Sei $\mathcal{A}(V)$ ein affiner Raum. Die Elementen $P_0, P_1, \ldots, P_n \in \mathcal{A}$ sind eine **affine Basis** von $\mathcal{A}$, wenn die Vektoren

$$\mathbf{v}_1 = \overline{P_0P_1}, \mathbf{v}_2 = \overline{P_0P_2}, \ldots, \mathbf{v}_n = \overline{P_0P_n} \in V$$

eine Basis von V bilden.

Definition 12.3: Unten eine **affine Kombination** verstehen wir eine lineare Kombination den Vektoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ eines $\mathbb{K}$-Vektorraum V, $\mathbf{w} = \sum_i \alpha_i \mathbf{v}_i$, wo es gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1.$$

Durch affine Kombinationen kann man die Summe von Punkten eines affines Raums definieren.

Theorem [12.1]. Sei $\mathcal{A}(V)$ ein affiner Raum, und seien $P_1, \ldots, P_n$ gegebene Punkten in $\mathcal{A}$. Sei $O \in \mathcal{A}$ ein beliebig *Origin*. Die affine Kombination

$$O + \sum_{i=1}^{n} \alpha_1 \overline{OP_i}$$

ist unabhangig von der Wahl des Punkts O.

Dank dieses Theorem, kann man die affine Kombination von Punkten eines affines Raum definieren. Wenn $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i P_i = O + \sum_{i=1}^{n} \alpha_1 \overline{OP_i}$$

(für ein beliebiges $O \in \mathcal{A}$).

Definition 12.4: Die Punkt $P_0, \ldots, P_n \in \mathcal{A}$ sind **affine unabhängig** wenn keinen kann als affine Kombination den anderen geschrieben werden.

Definition 12.6 (Baryzentrische Koordinaten): In einem Vektorraum, wenn das Koordinatensystem, für einen gegeben Nullpunkt $\mathbf{0}$ klar ist, hat dann jeder Punkt P eine eindeutige Darstellung. Zum Beispiel, in $\mathbb{R}^n$

$$P = \mathbf{0} + a_1\mathbf{e}_1 + \ldots + a_n\mathbf{e}_n$$

wo $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ die Euclidische Basis ist.
In einem affinem Raum gibt es keine ausgezeichneten Nullpunkt, und das Koordinatensystem hängt von der Wahl des Origin ab. Sei $\mathcal{A}(V)$ ein affiner Raum, und $P_0, P_1, \ldots, P_n$ eine **affine Basis**. Wählt man als *Origin* den Punkt P_0, dann für eine beliebig Punkt $P \in \mathcal{A}$, es gibt $\mu_1, \ldots, \mu_n$ so daß

$$P - P_0 = \overline{P_0P} = \mu_1\overline{P_0P_1} + \ldots + \mu_n\overline{P_0P_n} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(P_i - P_0)$$

Die *Koordinaten* μ_i heißen **inhomogene affine** Koordinaten. Mit

$$\lambda_0 = \left(1 - \sum_{i=1}^{n} \mu_i\right), \ \lambda_1 = \mu_1, \ \ldots, \ \lambda_n = \mu_n,$$

kann man $P = \lambda_0 P_0 + \lambda_n P_n$ als affine Kombination schreiben.
Die Koordinaten $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$ heißen **baryzentrische affine** Koordinaten. Die baryzentrischen Koordinaten liefern formal die gleiche Darstellung des Punktes unabhängig von dem Origin (Theorem 12-1).

Definition 12.5: Sei $\mathcal{A}(V)$ ein affiner Raum. Eine nichtleere Teilmenge $H \subset \mathcal{A}$ heißt **affiner Unterraum** von $\mathcal{A}$, wenn es geschlossen gegenüber affinen Kombinationen ist:
$\forall P_1, \ldots, P_n \in H$, $\forall \alpha_i, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, mit $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, dann

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i P_i \in H.$$

Folgende Definition ist äquivalent: $H \subset \mathcal{A}$ ist ein effiner Unterram von $\mathcal{A}$, genau wenn einen Punkt $P \in H$ und einen Unterraum U von V gibt, daß

$$H = \{Q \in \mathcal{A} \mid Q = P + \mathbf{u}, \text{ für } \mathbf{u} \in U\}$$

ist. H ist dann die *Verschiebung des Unterraums* U (man schreibt $H = P + U$).

Parallel und windschief affiner Unterräume
Zwei affine Unterräume $H_1 = P_1 + U_1$, $H_2 = P_2 + U_2$ heißen **parallel**, wenn $U_1 \subset U_2$ oder $U_2 \subset U_1$ Wenn sie nicht parallel sind und ihr Durchschnitt leer ist, so heißen sie **windschief**.