

### Aufgabe 1: (Rotationsmatrizen, 20 Punkte)

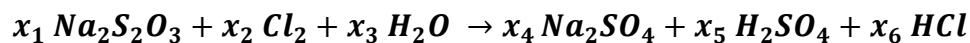
Gegeben sei die Rotationsmatrix

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}, \quad \alpha \in [0, \pi].$$

- a) Ist die Matrix orthogonal? Begründen Sie Ihre Antwort mit Hilfe einer Rechnung.
- b) Berechnen Sie die Determinante der Matrix  $R_\alpha$ . Stellt  $R_\alpha$  eine volumentreue, spiegelfreie Abbildung dar?
- c) Berechnen Sie die Eigenwerte von  $R_\alpha$ .

### Aufgabe 2: (Lineares Gleichungssystem, 10 Punkte)

Bestimmen Sie ganzzahlige stöchiometrische Koeffizienten  $x_1, \dots, x_6$  der folgenden Reaktionsgleichung (Entfernung von Chlor in Bleichprozessen), so dass die Massenbilanz passt:



### Aufgabe 3: (Orthonormalsysteme, Projektionsmatrizen, 40 Punkte)

Gegeben seien die folgenden beiden Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{v}_2 = \begin{pmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 0 \\ 2/3 \end{pmatrix}.$$

- a) Zeigen Sie, dass die beiden Vektoren  $v_1, \hat{v}_2$  ein Orthonormalsystem (ONS) bilden.

- b) Gegeben sei ein weiterer Vektor  $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$ . Führen Sie für das Orthonormalsystem

$\{v_1, \hat{v}_2\}$  und für den Vektor  $v_3$  den Gram-Schmidt-Algorithmus durch und berechnen Sie mit dessen Hilfe  $\hat{v}_3$ , so dass  $\{v_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3\}$  ein Orthonormalsystem bilden.

- c) Stellen Sie die Projektionsmatrix  $\Pi$  auf, die eine Projektion eines 4-dimensionalen Vektors auf die Ebene darstellt, die von den beiden Vektoren  $v_1$  und  $\hat{v}_2$  aufgespannt wird.

- d) Begründen Sie ohne Rechnung: Welchen Wert hat die Determinante von  $\Pi$ ?

**Aufgabe 4: (Eigenwerte/Eigenvektoren, Diagonalisierbarkeit, 30 Punkte)**

**a)** Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrix  $A$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(Tipp: Zeigen Sie zunächst durch ausführliche Rechnung, dass das charakteristische Polynom der Matrix  $(2 - \lambda)^3$  lautet).

**b)** Warum ist die Matrix  $A$  nicht diagonalisierbar?

**Viel Erfolg!**