3. Teil: Umrechnen von physikalischen Einheiten, Kegelschnitte, Umkehrfunktion

Umrechnen von physikalischen Einheiten

Eine ganze Reihe physikalischer Grössen ist als Quotient von einfacheren Grössen definiert. Als Beispiele seien die Geschwindigkeit (Länge/Zeit), die Dichte (Masse/Volumen) oder der Druck (Kraft/Fläche) genannt. Zum Umrechnen der physikalischen Einheit in solchen und anderen Fällen, z. B. bei Geschwindigkeiten von der Einheit km/h auf die SI-Einheit m/s, nutzt man die entsprechenden Beziehungen zwischen alter und neuer Einheit um die alte Einheit durch die neue Einheit zu ersetzen, z. B. 1 km = 1000 m und 1 h = 3600 s.

Einige Beispiele:

Die Geschwindigkeit $v = 60$ km/h ist wie gross in m/s?

Rechnen Sie die Dichte $\rho = 1{,}2$ g/cm^3 in die SI-Einheit kg/m^3 um.

Welche Strecke ist ein Lichtjahr? (Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist $c_0 = 299792458$ m/s; das Jahr ist mit 365,25 Tagen zu je 24 Stunden zu rechnen.)

Für die Druckeinheit Atmosphäre (atm) gilt:
1 atm = 760 Torr = 760 mm Hg = 1013,25 hPa = $1{,}01325 \cdot 10^5$ kg/(m s^2)

Der normale Blutzuckerspiegel liegt bei einem gesunden Menschen im Bereich 80 − 120 mg Glucose / dL. Welchem Intervall der Stoffmengenkonzentration (in mmol/L) entspricht dies?[2]

Wichtig für die Spektroskopie:
Was ist der Zusammenhang zwischen Frequenz ν (SI-Einheit: $[\nu]$ = Hz), Wellenlänge λ (SI-Einheit: $[\lambda]$ = m) und Wellenzahl $\tilde{\nu}$ (übliche Einheit: $[\tilde{\nu}] = \mathrm{cm}^{-1}$)? Die Wellenzahl ist der Kehrwert der Wellenlänge:

$$\lambda = \frac{1}{\tilde{\nu}}\,.$$

Ausserdem sind Frequenz und Wellenlänge mit der Geschwindigkeit c der Welle verknüpft:

$$c = \lambda\,\nu = \frac{\nu}{\tilde{\nu}}\,.$$

Es gilt also folgende Beziehung zwischen Wellenzahl und Frequenz:

$$\tilde{\nu} = \frac{\nu}{c}\,.$$

Die Wellenzahl ist, ebenso wie die Frequenz, proportional zur Energie:

$$E = h\,\nu = h\,c\,\tilde{\nu}\,.$$

Reine Rotationsspektren liegen typischerweise im Bereich $1 - 100$ cm^{-1}, (Rotations-)Schwingungsspektren im Bereich $100 - 5000$ cm^{-1}.

Kegelschnitte

Gegeben sei eine vertikale Achse, kurz Vertikale genannt, sowie eine weitere Gerade g, welche die Vertikale in einem Punkt P nicht senkrecht schneidet. Durch Rotation der Geraden g um die

[2] Das Einheitenzeichen für die Volumeneinheit Liter ist l. Zur Vermeidung von Verwechslungen mit dem Symbol für die Zahl Eins (1) verwenden wir hier das alternative Einheitenzeichen L.

Vertikale wird die Mantelfläche eines Doppelkegels erzeugt. Der Punkt P markiert die Spitze der beiden Kegel.

Kegelschnitte heissen nun diejenigen Kurven, die sich als Schnittlinien des Doppelkegels mit Ebenen ergeben. Steht die Ebene senkrecht zur Vertikalen, so ergeben sich **Kreise** als Schnittfiguren. Wird der Durchstosspunkt der Vertikalen durch die Ebene als Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems in der Ebene gewählt, so ist die Gleichung für einen Kreis mit Radius r gegeben durch (vgl. auch mit dem Satz des Pythagoras)

$$x^2 + y^2 = r^2\,.$$

(Der Fall $r = 0$ bedeutet, dass die Ebene den Doppelkegel im Punkt P schneidet.) Ist der Winkel, mit dem die Ebene die Vertikale schneidet, kleiner als ein rechter Winkel, so entstehen zunächst **Ellipsen** als Schnittfiguren. Eine Form der Ellipsengleichung ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

Hier bezeichnen a und b die sogenannten Halbachsen der Ellipse (falls $a = b$ ist, entsteht wieder die Kreisgleichung). Eine **Parabel** ergibt sich als Schnittfigur, wenn die Vertikale mit der Schnittebene denselben Winkel bildet wie mit der Geraden g. Parabeln mit der x-Achse als Symmetrieachse werden beschrieben durch die Gleichung

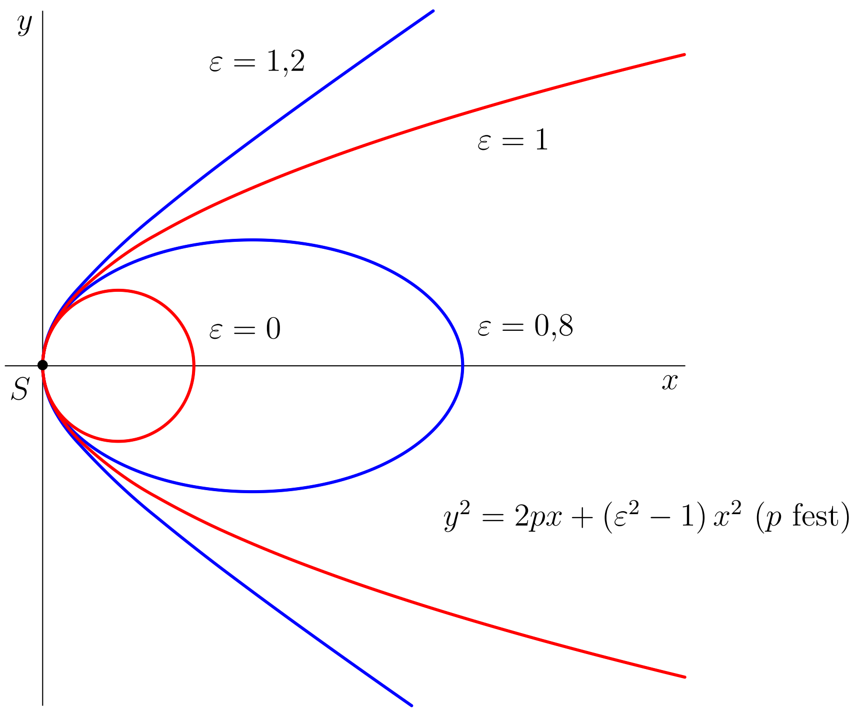
$$y^2 = a\,x\,.$$

Wird schliesslich der Schnittwinkel zwischen Achse a und Ebene weiter verringert, so ergeben sich **Hyperbeln** als Schnittfiguren. Eine Form der Hyperbelgleichung ist

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

Wählt man jedoch den Scheitelpunkt S der Kegelschnitte als Ursprung des Koordinatensystems und orientiert das Koordinatenachsen in geeigneter Weise, so lassen sich alle genannten Figuren aus einer gemeinsamen Gleichung erhalten (siehe folgende Abbildung):

$$y^2 = 2px + (\varepsilon^2 - 1)\,x^2 \qquad\qquad (p > 0,\ \varepsilon \geq 0).$$



Hier bedeutet ε die sogenannte numerische Exzentrizität und p den Radius des Krümmungskreises im Scheitelpunkt S. Für $\varepsilon = 0$ erhält man einen Kreis, für $0 < \varepsilon < 1$ erhält man Ellipsen, für $\varepsilon = 1$ eine Parabel, und für $\varepsilon > 1$ Hyperbeln.

Für jeden dieser Kegelschnitte entstehen durch Auflösen nach y **zwei** Funktionsgleichungen,

$$y = \pm \sqrt{2px + (\varepsilon^2 - 1)\, x^2}\,,$$

jeweils eine für den oberen und eine für den unteren Zweig des in der obigen Abbildung gezeigten Kegelschnittes.

Frage: Was ist der Definitionsbereich dieser Funktionen?

Anmerkungen: Im klassisch-mechanischen Zwei-Körper-Problem treten Kegelschnitte als Trajektorien (Bahnkurven) auf, z. B. bei der Beschreibung der Bewegung eines Planeten oder eines Kometen um die Sonne. Ellipsenbahnen beschreiben gebundene, sich periodisch wiederholende Bewegungen (1. Keplersches Gesetz, 1609, nach Johannes Kepler, 1571–1630), die Parabelbahn oder die Hyperbelbahnen beschreiben dagegen ungebundene, sich nicht wiederholende Bewegungen, die bei unendlich grossem Abstand vom Scheitelpunkt S beginnen und wieder bei unendlich grossem Abstand enden. — In der Sprache der frühen Quantenmechanik führt die Lösung des Zwei-Körper-Problems (ein Atomkern mit Ladung $q_{\mathrm{A}} = Ze$ und ein Elektron mit Ladung $q_{\mathrm{e}} = -e$, wobei $e \approx 1{,}6022 \cdot 10^{-19}$ C die Elementarladung ist) ebenfalls zu Kegelschnitten als Trajektorien (Bohr-Sommerfeldsches Atommodell, 1913/1916, nach Niels Bohr, 1885–1962, und Arnold Sommerfeld, 1868–1951). Für gebundene Zustände ergeben sich wiederum Kreis- oder Ellipsenbahnen, aber es sind nun nur noch bestimmte diskrete Energien des Systems zugelassen, d. h. die physikalische Grösse Energie ist nun „quantisiert“: $E_n/E_{\mathrm{h}} = -Z^2/(2n^2)$ (mit Kernladungszahl Z, Hauptquantenzahl n und $E_{\mathrm{h}} = 2$ Ry $\approx 27{,}2$ eV $\approx 4{,}36$ aJ). Es gibt also einen kleinsten zulässigen Energiewert, der den Grundzustand ($n = 1$) des Zwei-Körper-Problems charakterisiert, für Wasserstoff ($Z = 1$) ist dies $E_1 = -\frac{1}{2}\, E_{\mathrm{h}} \approx -13{,}6$ eV. Nach der Quantenmechanik ist Materie also stabil, selbst wenn man sich Materie als aus elektrisch entgegengesetzt geladenen Punktteilchen aufgebaut vorstellt (mit Elektrostatik alleine ist eine Vorstellung der Stabilität von Materie nicht zu gewinnen, denn die potentielle Coulomb-Energie zwischen Atomkern und Elektron im Abstand r, $E_{\mathrm{pot}} \sim q_{\mathrm{A}}\, q_{\mathrm{e}}/r$, geht für $r \to 0$ nach $-\infty$, das Elektron würde also unter Energieabgabe in Form von elektromagnetischer Strahlung in den Atomkern stürzen, und zwar in Sekundenbruchteilen). Für nicht-negative Energien ($E/E_{\mathrm{h}} \geq 0$) wird die Streuung des Elektrons am Atomkern beschrieben. Wie bei der Streuung von α-Teilchen am Atomkern (Streuversuche von Ernest Rutherford, 1909–1913) und wie im klassisch-mechanischen Zwei-Körper-Problem sind bei der Streuung des Elektrons am Atomkern auch nach der Quantenmechanik beliebig positive Energiewerte zulässig. — Die moderne Quantenmechanik (Welle-Teilchen-Dualismus, Louis de Broglie, 1924; Matrizenmechanik, Werner Heisenberg, 1925; Wellenmechanik und Schrödinger-Gleichung $\mathrm{i}\,\hbar\,\dot{\psi} = \widehat{H}\psi$, Erwin Schödinger, 1926) hat die Vorstellung von Trajektorien völlig aufgegeben, ohne dass sich dadurch an den Messwerten beobachtbarer Grössen (z. B. der Energie) irgendetwas geändert hätte.

Umkehrfunktion

Definitionsgemäss ordnet eine Funktion f jedem x aus ihrem Definitionsbereich D_f *eindeutig* ein $y = f(x)$ aus ihrem Wertebereich W_f zu:

$$f : x \in D_f \mapsto y = f(x) \in W_f\,.$$

Falls nun umgekehrt auch jedem $y \in W_f$ wieder *eindeutig* ein $x \in D_f$ zugeordnet werden kann, so existiert die **Umkehrfunktion** (oder **inverse Funktion**) zu f. Die Umkehrfunktion zur

Funktion f wird oft mit f^{-1} (oder $\overline{f}$) bezeichnet, also

$$f^{-1} : y \in D_{f^{-1}} = W_f \mapsto x = f^{-1}(y) \in W_{f^{-1}} = D_f\,.$$

Im Rahmen der Beschränkungen, die evtl. hinsichtlich der Definitionsbereiche von f und f^{-1} zu beachten sind, gilt allgemein:

$$f : x \mapsto y = f(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad f^{-1} : y \mapsto x = f^{-1}(y)\,.$$

Im Schaubild bedeutet dies nichts weiter als die „Umkehrung der Ableserichtung“: Statt zu einem vorgegebenen x eindeutig ein dazugehörendes $y = f(x)$ zu finden, wird nun umgekehrt ein y vorgegeben und eindeutig ein dazu passendes $x = f^{-1}(y)$ gefunden. Am Schaubild selbst ändert sich deswegen gar nichts!

Für das Verketten („Nacheinanderausführen“) von Funktion (Operation) f und zugehöriger Umkehrfunktion (Umkehroperation) f^{-1} folgen damit die allgemein gültigen Beziehungen

$$y = f(x) = f(f^{-1}(y)) = (f \circ f^{-1})(y) \qquad \text{und} \qquad x = f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = (f^{-1} \circ f)(x)\,.$$

Für eine beliebige Funktion f und die zu ihr gehörende Umkehrfunktion f^{-1} stellt die Verkettung der beiden, in beliebiger Reihenfolge, also eine Identitätsoperation dar, die insgesamt gar nichts(!) tut. Damit ist für beliebige Funktionen f — im Rahmen der o. g. Beschränkungen — eine Situation erreicht, die sehr weitgehend der entspricht, die für andere Paare zueinander inverser mathematischer Operationen (z. B. Addition/Subtraktion, Multiplikation/Division) schon lange bekannt ist.

Möchte man an der Gewohnheit festhalten, dass die unabhängige Variable stets x heisst, so hat man zwei verschiedene Funktionen mit den Gleichungen $y = f(x)$ und $y = f^{-1}(x)$ zu betrachten (man beachte den Unterschied bei den Stellen, an denen x und y auftreten, hier und oben). Die zugehörigen Kurve im Schaubild gehen durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden $y = x$ ineinander über.

Vorsicht: Die Notation f^{-1} für die Umkehrfunktion zur Funktion f darf nicht verwechselt werden mit dem Kehrwert der Funktion f. Im allgemeinen ist $y = f^{-1}(x)$ (oder $y = \overline{f}(x)$) etwas ganz anderes als $y = [f(x)]^{-1} = 1/f(x)$. Die Missachtung dieses Sachverhalts führt immer wieder zu — völlig vermeidbaren — Fehlern bei der Bedienung elektronischer Computer oder Taschenrechner (z. B. Arkustangensfunktion $\tan^{-1} \equiv \arctan$ als Umkehrfunktion zur Tangensfunktion tan, im Unterschied zur Kotangensfunktion cot als Kehrwertfunktion zur Tangensfunktion).

Beispiele für Paare von Funktionen und Umkehrfunktionen:

(a) Normalparabel ($y = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, Abbildung dazu s. 1. Teil):
(a1) Zu $y = f(x) = x^2$ mit $x \geq 0$, $y \geq 0$ (rechter Zweig der Parabel) gehört $x = f^{-1}(y) = +\sqrt{y}$ mit $y \geq 0$, $x \geq 0$.
(a2) Zu $y = f(x) = x^2$ mit $x < 0$, $y > 0$ (linker Zweig der Parabel) gehört dagegen $x = f^{-1}(y) = -\sqrt{y}$ mit $y > 0$, $x < 0$.

(b) Parabel als Kegelschnitt ($y^2 = 2px$, $x \geq 0$, $p > 0$, Abbildung dazu s. oben):
(b1) Zu $y = +\sqrt{2px}$ mit $x \geq 0$, $y \geq 0$ (oberer Zweig der Parabel) gehört $x = y^2/(2p)$ mit $y \geq 0$, $x \geq 0$.
(b2) Zu $y = -\sqrt{2px}$ mit $x > 0$, $y < 0$ (unterer Zweig der Parabel) gehört dagegen $x = y^2/(2p)$ mit $y < 0$, $x > 0$.

(c) Ellipse als Kegelschnitt ($y^2 = 2px + (\varepsilon^2 - 1)\,x^2$, $p > 0$, $0 < \varepsilon < 1$, $0 \leq x \leq 2a$, $-b \leq y \leq b$, Halbachsen der Ellipse: $a = p/(1-\varepsilon^2)$, $b = p/\sqrt{1-\varepsilon^2}$, Abbildung dazu s. oben):

(c1) Zu $y = +\sqrt{2px + (\varepsilon^2 - 1)\,x^2}$ mit $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$ (linker oberer Viertelbogen) gehört $x = a - a\sqrt{1 - y^2/b^2}$ mit $0 \le y \le b$, $0 \le x \le a$.
(c2) Zu $y = +\sqrt{2px + (\varepsilon^2 - 1)\,x^2}$ mit $a < x \le 2a$, $0 \le y < b$ (rechter oberer Viertelbogen) gehört $x = a + a\sqrt{1 - y^2/b^2}$ mit $0 \le y < b$, $a < x \le 2a$.
(c3) Zu $y = -\sqrt{2px + (\varepsilon^2 - 1)\,x^2}$ mit $0 < x \le a$, $-b \le y < 0$ (linker unterer Viertelbogen) gehört $x = a - a\sqrt{1 - y^2/b^2}$ mit $-b \le y < 0$, $0 < x \le a$.
(c4) Zu $y = -\sqrt{2px + (\varepsilon^2 - 1)\,x^2}$ mit $a < x < 2a$, $-b < y < 0$ (rechter unterer Viertelbogen) gehört $x = a + a\sqrt{1 - y^2/b^2}$ mit $-b < y < 0$, $a < x < 2a$.