

5. Teil

Nachtrag zu den Kreisfunktionen

Die Sinus- und Kosinusfunktionen sehen aus wie Wellen. Wellen sind aus dem Alltag bekannt (z. B. Wasserwellen auf der Oberfläche eines Teichs, oder elektromagnetische Wellen [Radiowellen, Licht]). Wellenartiges Verhalten kann als Funktion des Ortes, als Funktion der Zeit, oder sogar als Funktion von Ort und Zeit auftreten. Ein allgemeiner Ausdruck für eine zeitabhängige Welle $u(t)$, wie er in der Physik Verwendung findet, ist:

$$u(t) = A \sin(\omega t + \phi).$$

Hier bedeutet:

- A die Amplitude der Welle (der grösste Wert, den die Funktion annehmen kann),
- ϕ die Phase (oder den Phasenwinkel; ein fester Wert),
- ω die Kreisfrequenz ($\omega = 2\pi\nu$ mit Frequenz ν , SI-Einheit $[\nu] = \text{s}^{-1}$),
- t die Zeit (SI-Einheit $[t] = \text{s}$).

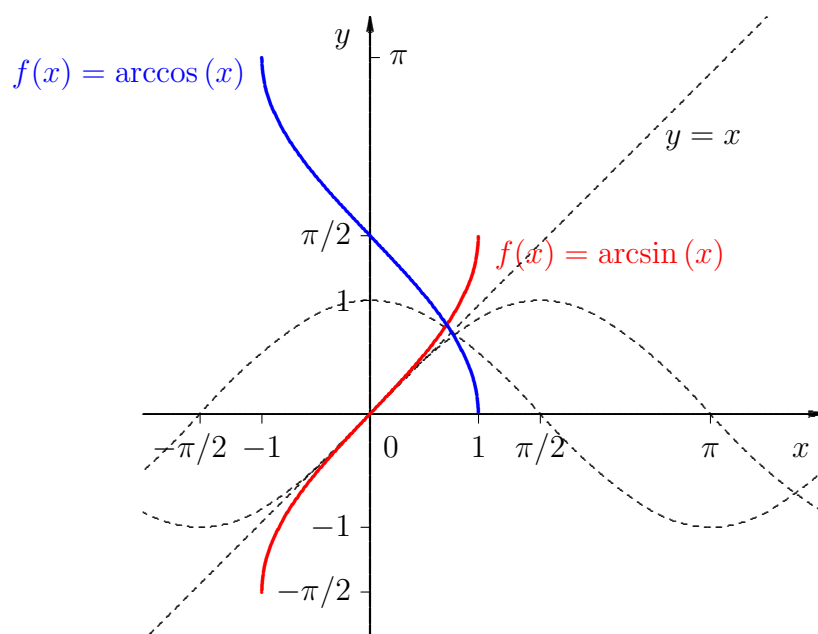
Die Periode der Funktion $u(t)$ ist $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu}$ (SI-Einheit $[T] = \text{s}$), denn es ist $u(t + kT) = u(t)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Umkehrfunktionen der Kreisfunktionen

Gegeben sei ein Funktionswert $y = \sin(x)$. Welcher Winkel x (in Bogenmass) gehört dazu? Zur Beantwortung dieser Frage ist eigentlich nichts weiter nötig als Kenntnis und Umgang mit der passenden Umkehrfunktion. Die Umkehrfunktion der Sinusfunktion heisst Arcussinus-Funktion (Formelzeichen $\arcsin$), so dass $x = \arcsin(y)$ die eben gestellte Frage formal beantwortet (also: x ist der Bogen [arcus], dessen Sinus-Wert y ist). **Aber Vorsicht!** Die Sinusfunktion ist nicht in ihrem gesamten Definitionsbereich eindeutig umkehrbar! Aber beispielsweise für $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ ist sie es. In diesem Intervall ihres Definitionsbereiches nimmt sie Werte $y = \sin(x)$ aus dem Intervall $[-1, 1]$ an. Damit sind die Definitions- und Wertebereiche der Umkehrfunktion ebenfalls festgelegt, so dass also gilt:

$$y = \arcsin(x) \quad \text{mit } x \in [-1, 1] \text{ und } y \in [-\pi/2, \pi/2].$$

Schaubild der Funktionen $\arcsin(x)$ und $\arccos(x)$:



Man könnte allgemeiner schreiben $y \in [k\pi - \pi/2, k\pi + \pi/2]$ (mit festgelegtem $k \in \mathbb{Z}$). Die Funktionswerte (zur Erinnerung: es sind Winkel im Bogenmass) lägen damit stets in einem Intervall der Länge π um den Wert $k\pi$ herum. Der (interessierende oder relevante) Wert von k wäre dann jeweils festzulegen. Die Wahl $k = 0$ (s. o.) liefert den sogenannten Hauptwert, den auch der Taschenrechner üblicherweise angibt.

Exponentialfunktionen und Logarithmusfunktionen

Zur Erinnerung: Es ist

$$10^2 \cdot 10^5 = 10^{2+5} = 10^7 \quad \text{und} \quad (10^3)^2 = 10^{3 \cdot 2} = 10^6 \neq 10^9 = 10^{(3^2)},$$

sowie

$$2^4 \cdot 2^5 = 2^{4+5} = 2^9 \quad \text{und} \quad (2^2)^3 = 2^{2 \cdot 3} = 2^6 \neq 2^8 = 2^{(2^3)}.$$

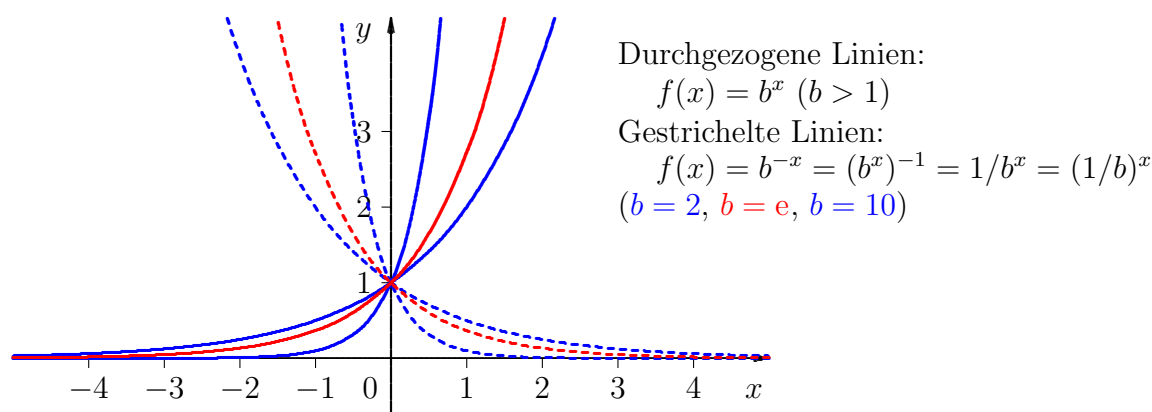
Lässt man als Exponenten beliebige reelle Zahlen zu (wie in $2^u \cdot 2^v = 2^{u+v}$ mit $u, v \in \mathbb{R}$), so gelangt man zum Begriff des Logarithmus: Der Exponent x in $y = 2^x$ heisst **Logarithmus** von y zur Basis(zahl) 2. Anders formuliert: x ist der Exponent, den man wählen muss, um y als Potenz der hier als Basis gewählten Zahl 2 schreiben zu können.

Welche Zahlen lassen sich als Potenzen einer Basiszahl b darstellen? Jede positive reelle Zahl y besitzt für jede positive reelle Basiszahl b ($b \neq 1$) einen Logarithmus x , so dass gilt $y = b^x$ oder $x = \log_b(y)$.

Exponentialfunktionen

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist mit $y = b^x$ ($b > 0$, $b \neq 1$) eine Exponentialfunktion definiert: die Exponentialfunktion zur Basis(zahl) b . Spezielle Funktionswerte sind $y = 1$ für $x = 0$, $y = b$ für $x = 1$ und $y = 1/b$ für $x = -1$. In Anwendungen häufig auftretende Basiszahlen sind $b = 2$ (s. o.), $b = e$ (sogenannte **natürliche Exponentialfunktion**, meist kurz „die Exponentialfunktion“ genannt)³ und $b = 10$ (s. o.). Für Exponentialfunktionen mit Basiszahl $b > 1$ gilt, dass sie für $x \rightarrow -\infty$ gegen den Wert 0 streben und für $x \rightarrow \infty$ unbeschränkt wachsen (gegen $+\infty$ divergieren). Wegen ihres häufigen Auftretens bei der Beschreibung natürlicher Vorgänge wird die Funktion $y = e^x = \exp(x)$ als „natürliche“ Wachstumsfunktion bezeichnet.⁴

Schaubild von Exponentialfunktionen b^x ($b > 1$, durchgezogene Linien) und ihren Kehrwertfunktionen b^{-x} (gestrichelte Linien) für $b = 2$ (blau), $b = e$ (rot) und $b = 10$ (blau):



³ Die Zahl $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,7182818284590452353602874713526 \dots$ heisst Eulersche Zahl.

⁴ Kein natürlicher orts- oder zeitabhängiger Wachstumsvorgang, der dem Einfluss oder der Kontrolle des Menschen unterliegt, kann über beliebig lange Zeiten oder Räume tatsächlich durch diese „natürliche“ Wachstumsfunktion (oder irgend eine andere unbeschränkt wachsende Funktion) beschrieben werden, denn die Ressourcen, die uns zur Verfügung stehen um das Wachstum zu unterhalten, sind immer endlich, niemals unendlich (unbeschränktes Wachstum erfordert unbeschränkte Ressourcen, welche aber nicht zur Verfügung stehen).

Für die Anwendungen mindestens ebenso wichtig wie die Exponentialfunktion $y = e^x = \exp(x)$, oder sogar noch wichtiger als diese, ist ihre Kehrwertfunktion $y = 1/e^x = (e^x)^{-1} = e^{-x} = \exp(-x)$. Diese ist auch als Funktion des exponentiellen Zerfalls oder des exponentiellen Abklingens bekannt. Anwendungsbeispiele aus der Chemie und der Physik umfassen die Beschreibung des monomolekularen Zerfalls (Kinetik 1. Ordnung) sowie des radioaktiven Zerfalls: Sei von einer Grösse Q zu einem Zeitpunkt $t = t_0$ die Menge Q_0 vorhanden, und zerfällt diese Menge nach einem Exponentialgesetz, so lautet die Gleichung für $Q(t)$

$$Q(t) = Q_0 e^{-k(t-t_0)}.$$

Hier ist $k > 0$ eine für den untersuchten Zerfallsprozess spezifische Konstante (Zerfallskonstante) mit der Dimension $[k] = 1/[t]$. Diese Gleichung gilt nicht nur für $t \geq t_0$, sondern auch für $t < t_0$, und gestattet damit z. B. beim radioaktiven Zerfall die Berechnung der in der Vergangenheit vorhanden gewesenen Menge eines radioaktiven Stoffes $Q(t)$ ($t < t_0$) aus der Kenntnis der zu einem Bezugszeitpunkt t_0 vorhandenen Menge $Q_0 = Q(t_0)$ und der stoffspezifischen (nuklidspezifischen) Zerfallskonstanten k .

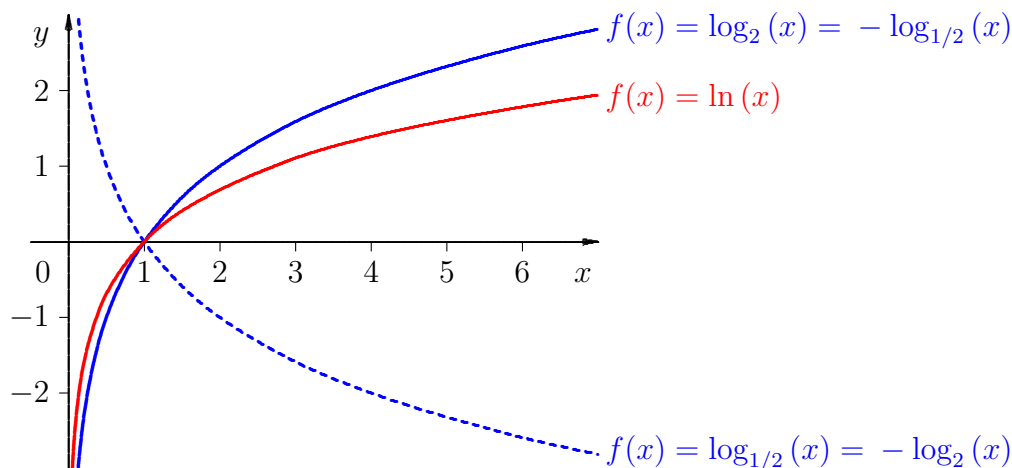
Folgende mathematische Tatsache ist in diesem Zusammenhang noch von Bedeutung: Für $x \rightarrow \infty$ fällt die Funktion $y = e^{-x}$ schneller gegen 0 ab als irgendeine Potenzfunktion $y = x^n$ ($n \gg 1$) ansteigen kann. Daraus folgt, dass jede Funktion der Form $y = x^n e^{-x} = x^n / e^x$ („Potenzfunktion mal abklingende Exponentialfunktion“) für $x \rightarrow \infty$ „früher oder später“ sehr rasch gegen 0 strebt (genauer: die Funktion $y = x^n e^{-x}$, $n \gg 1$, strebt für $x > n$ rasch gegen 0).

Logarithmusfunktionen

Die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion $y = b^x$ ($b > 0$, $b \neq 1$) ist die Logarithmusfunktion $x = \log_b(y)$:

$$f : x \mapsto y = b^x \quad (D_f = \mathbb{R}, W_f = \mathbb{R}^+) \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1} : y \mapsto x = \log_b(y) \quad (D_{f^{-1}} = \mathbb{R}^+, W_{f^{-1}} = \mathbb{R}).$$

Schaubild einiger Logarithmusfunktionen $y = \log_b(x)$:



Für häufig auftretende Basiszahlen sind spezielle Notationen in Gebrauch:

- $b = 2$: $\log_2(x) = \text{lb}(x)$ (Zweierlogarithmen),
- $b = e$: $\log_e(x) = \ln(x)$ (**natürliche Logarithmen**),
- $b = 10$: $\log_{10}(x) = \lg(x)$ (Zehnerlogarithmen, dekadische Logarithmen).

Logarithmengesetze sind eine Variante der bekannten Potenzrechengesetze (s. o.), wobei aber jetzt stets eine feste Basis(zahl) b vorliegt oder angenommen ist (die Art der verwendeten Logarithmen gibt an, welche Basiszahl Verwendung findet). Für alle $x > 0$, $y > 0$ und $s \in \mathbb{R}$ ist

$$(1) \quad \log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y) \quad \text{und} \quad (2) \quad \log_b(x^s) = s \log_b(x).$$

Durch Kombination dieser beiden Rechenregeln folgt auch

$$\log_b \left(\frac{x}{y} \right) = \log_b (x \cdot y^{-1}) = \log_b (x) - \log_b (y).$$

Kleine Übungsaufgabe: Logarithmiere den Ausdruck $u = \frac{3x^2 \sqrt[3]{y}}{2a^3 z}$.

Durch Logarithmieren werden Punkt-Rechenoperationen (Multiplikation und Division) auf die einfacheren Strich-Rechenoperationen (Addition und Subtraktion) zurückgeführt (s. Logarithmengesetze). Ausserdem wechselt mit der Verwendung von Logarithmen der Blick von einer Grösse Q auf ihre Grössenordnung $\log_{10}(Q) = \lg(Q)$. Daraus ergeben sich wichtige Anwendungen ...

- ... in allen Gebieten der Naturwissenschaften, in welchen mit sehr grossen oder sehr kleinen Grössen gearbeitet wird (historisch zuerst in der Astronomie [→ Logarithmentafeln von Jost Bürgi, John Napier und Henry Briggs vom Anfang des 17. Jhdts.], aber ebenso in Chemie und Physik [pH-Wert, Nernst-Gleichung, statistische Thermodynamik]);
- ... bei der Angabe beispielsweise der Stärke von Erdbeben (Richterskala), der Stärke von Vulkanausbrüchen (volcanic explosivity index, VEI), der Leuchtkraft von Sternen;
- ... für einfach-logarithmische Diagramme (aus $u = Ab^{kx}$, $x \in \mathbb{R}$, wird durch Logarithmieren eine lineare Funktion [Gerade] in x erhalten: $y = \log_b(u) = kx + \log_b(A)$);
- ... für doppelt-logarithmische Diagramme (aus $u = At^s$, $t > 0$, wird durch Logarithmieren eine lineare Funktion [Gerade] in $x = \log_b(t)$ erhalten: $y = \log_b(u) = \log_b(A) + s \log_b(t)$).

Umrechnung zwischen verschiedenen Basiszahlen

Umrechnen von Exponential- und Logarithmusfunktionen zwischen verschiedenen Basiszahlen: Ein und dieselbe positive reelle Zahl y kann als Potenz zu einer Basis(zahl) b oder als Potenz zu einer anderen Basis(zahl) a geschrieben werden. Zunächst gilt dann

$$y = b^x = a^t \quad \Leftrightarrow \quad (x = \log_b(y) \quad \text{und} \quad t = \log_a(y)).$$

Da jedoch $a^t = b^{\log_b(a^t)} = b^{t \log_b(a)}$ und $b^x = a^{\log_a(b^x)} = a^{x \log_a(b)}$ ist, gilt auch

$$x = \log_b(y) = t \log_b(a) = \log_b(a) \cdot \log_a(y) \quad \text{und} \quad t = \log_a(y) = x \log_a(b) = \log_a(b) \cdot \log_b(y),$$

wobei stets $\log_b(a) = 1/\log_a(b)$ ist. Für das Paar von Basiszahlen $b = 10$ und $a = e$ gilt also:

- Umrechnung von Zehnerpotenz in natürliche Exponentialfunktion:

$$y = 10^x = e^{kx}, \quad k = \ln(10).$$

- Umrechnung von natürlicher Exponentialfunktion in Zehnerpotenz:

$$y = e^t = 10^{\lambda t}, \quad \lambda = \lg(e).$$

- Umrechnung von Zehnerlogarithmen in natürliche Logarithmen:

$$x = \lg(y) = \lg(e) \cdot \ln(y) \quad \Rightarrow \quad t = \ln(y) = \frac{\lg(y)}{\lg(e)} = \frac{1}{\lambda} \lg(y) = k \lg(y) = kx.$$

- Umrechnung von natürlichen Logarithmen in Zehnerlogarithmen:

$$t = \ln(y) = \ln(10) \cdot \lg(y) \quad \Rightarrow \quad x = \lg(y) = \frac{\ln(y)}{\ln(10)} = \frac{1}{k} \ln(y) = \lambda \ln(y) = \lambda t.$$

Die Umrechnungsfaktoren hier sind $k = \ln(10) \approx 2,3026$ und $\lambda = \lg(e) \approx 0,4343$ ($k\lambda = 1$).

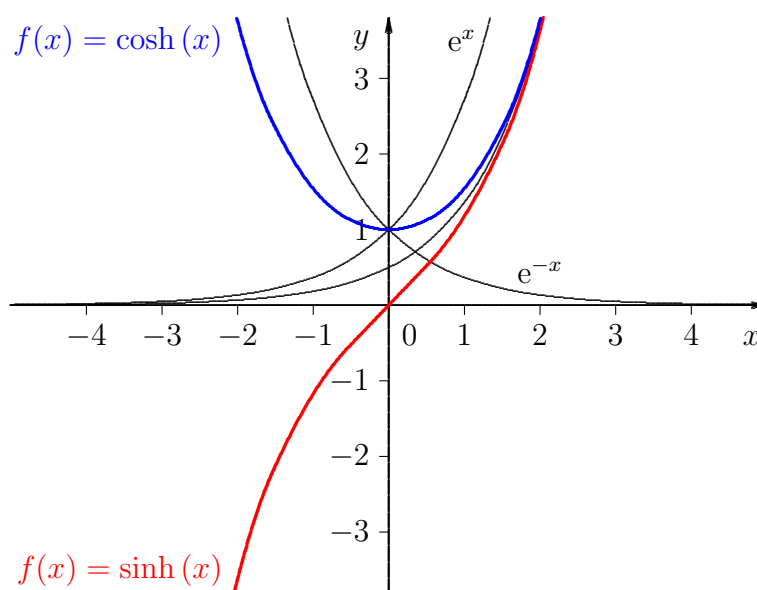
Sowohl die **natürliche Exponentialfunktion** ($e^x = \exp(x)$) wie auch der **natürliche Logarithmus** ($\ln(x)$) spielen in der Differential- und Integralrechnung eine ausserordentlich grosse Rolle (s. später). Beide Funktionen haben auch sehr viele Anwendungen in den Naturwissenschaften. Und die Umrechnungsformeln zeigen, dass man ganz gut ohne andere Exponential- und Logarithmusfunktionen (also solche zu einer Basiszahl $b \neq e$) auskommen könnte. In unserem System der Zahlendarstellung auf der Basis der Zahl 10 (Dezimaldarstellung) sind aber Zehnerpotenzen und Zehnerlogarithmen viel einfacher zu handhaben als Potenzen und Logarithmen zu Basiszahlen $b \neq 10$. Deshalb spielen Zehnerpotenzen und -logarithmen in der Praxis auch eine grosse Rolle — und machen es erforderlich, ggf. zwischen Exponential- und Logarithmusfunktionen zu verschiedenen Basiszahlen umrechnen zu können.

Hyperbelfunktionen

Zerlegt man die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ in ihre ungeraden und geraden Anteile (s. 2. Teil), so gelangt man zu den **Hyperbelsinus-** und **Hyperbelkosinus-Funktionen**⁵:

$$\left. \begin{aligned} \sinh(x) &= (e^x - e^{-x})/2, \\ \cosh(x) &= (e^x + e^{-x})/2, \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x &= \cosh(x) + \sinh(x), \\ e^{-x} &= \cosh(x) - \sinh(x). \end{cases}$$

Es ist $\cosh(-x) = (e^{-x} + e^x)/2 = \cosh(x)$ (gerade Funktion) und $\sinh(-x) = (e^{-x} - e^x)/2 = -\sinh(x)$ (ungerade Funktion), wie zu erwarten war. Für beide Funktionen ist $y = \frac{1}{2}e^x$ die Asymptote für $x \rightarrow \infty$. Die folgende Abbildung zeigt die Funktionen $\sinh(x)$ und $\cosh(x)$, deren Asymptote $\frac{1}{2}e^x$, sowie die Funktionen e^x und $e^{-x} = 1/e^x$.



Anmerkung: Eine unter ihrem eigenen Gewicht durchhängende Kette (oder ein Seil) beschreibt eine als „Kettenlinie“ bekannte Kurve, die mit Hilfe der Hyperbelkosinus-Funktion in einer knappen Formel angegeben werden kann:

$$y(x) = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

(a ist der Krümmungsradius am Scheitelpunkt [Minimum]). Die „Kettenlinie“ ist also insbesondere kein Teil eines Kegelschnitts (kein Ellipsen-, Parabel- oder Hyperbelbogen).

⁵ Welche Beziehung zu Hyperbeln besteht und weshalb diese Funktionen so heissen wird hier nicht besprochen.