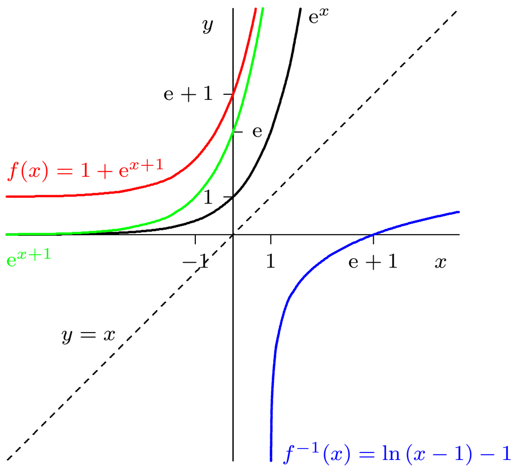
Brückenkurs Mathematik für Studierende der Chemie
Lösungen zu Übung 6

Exponentialfunktion und Logarithmen

1. Sie erinnern sich doch sicher noch ($r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = x + \mathrm{i}y$ mit $r = 1$ und $\varphi = \pi$): $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$.

2. (a) Wertetabelle (Werte auf 1 Dezimale):

x	$x+1$	e^x	e^{x+1}	$f(x)$
-1	0	0,4	1	2
0	1	1	2,7	3,7
1	2	2,7	7,4	8,4



Die Funktion $f(x)$ ist in D_f streng monoton. Für die Funktionswerte gilt: $W_f = \{y \in \mathbb{R} | y > 1\}$.

(b) Berechnung der Umkehrfunktion ($y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$):

$$y = 1 + \mathrm{e}^{x+1} \;\Rightarrow\; y - 1 = \mathrm{e}^{x+1} \;\Rightarrow\; x + 1 = \ln(y-1) \;\Rightarrow\; x = \ln(y-1) - 1$$

Daraus folgt (Vertauschen von x und y): $y = f^{-1}(x) = \ln(x-1) - 1$. Zum Zeichnen des Schaubilds von $y = f^{-1}(x)$ lassen sich dieselben Zahlenpaare wie für $y = f(x)$ verwenden, aber x- und y-Wert sind zu vertauschen.

3. Berechnung der nach 5 s noch vorhandenen Masse (Anfangsmasse $m_\mathrm{A}^0 = 6$ g, $k = 0{,}02\ \mathrm{s}^{-1}$):

$$m_\mathrm{A}(5\ \mathrm{s}) = 6\ \mathrm{g} \cdot \mathrm{e}^{-0{,}02 \cdot 5} = 6\ \mathrm{g} \cdot \mathrm{e}^{-0{,}1} = 6\ \mathrm{g} \cdot 0{,}9048 = 5{,}429\ \mathrm{g}$$

Berechnung der „Drittelwertszeit“ $t_{1/3}$:

$$m_\mathrm{A}(t_{1/3}) = \frac{1}{3}\, m_\mathrm{A}^0 = m_\mathrm{A}^0\, \mathrm{e}^{-k\, t_{1/3}} \quad\Rightarrow\quad \ln(1/3) = -\ln 3 = -k\, t_{1/3} \quad\Rightarrow\quad t_{1/3} = \frac{\ln(3)}{k}\,.$$

Hier also: $t_{1/3} = \dfrac{\ln(3)}{0{,}02\ \mathrm{s}^{-1}} = 54{,}93\ \mathrm{s} \approx 55\ \mathrm{s}$.

(Anmerkung: $t_{1/3}$ ist **nicht** abhängig von der Anfangsmasse m_A^0! Es hat sich also immer nach Ablauf einer Zeitspanne $\Delta t = t_{1/3}$ ein Drittel der zu Beginn der Zeitspanne vorhandenen Masse von A in Reaktionsprodukte umgewandelt, unabhängig davon, ob zu Beginn der Zeitspanne noch viel oder wenig von der Substanz A vorhanden war.)

4. Die Definition des pH-Wertes ist gegeben durch $[\mathrm{H_3O^+}] = 10^{-\mathrm{pH}}$ mol/l. Also ist hier

$$[\mathrm{H_3O^+}] = 10^{-8}\ \mathrm{mol/l} = 0{,}00000001\ \mathrm{mol/l}\,.$$

5. Es gilt: $\log_b(x) = y \Leftrightarrow x = b^y$. Also ist hier:

$$\lg(100) = \lg(10^2) = 2\,, \qquad \lg(10000) = \lg(10^4) = 4\,,$$

$$\lg(0{,}01) = \lg(10^{-2}) = -2\,, \qquad \lg\left(\frac{1}{10000}\right) = \lg(10^{-4}) = -4\,.$$

6. Es gilt: $\log_b(uv) = \log_b(u) + \log_b(v)$. Also ist hier:

$$\lg(5000) = \lg(5 \cdot 10^3) = \lg(5) + 3 \approx 0{,}699 + 3 = 3{,}699\,,$$

$$\lg(3 \cdot 10^{-2}) = \lg(3) - 2 \approx 0{,}477 - 2 = -1{,}523\,,$$

$$\lg(1100) = \lg((11/10) \cdot 10^3) = \lg(11/10) + 3 \approx 0{,}041 + 3 = 3{,}041\,.$$