Gram-Schmidt-Orthonormalisierung mit Funktionen

Wir betrachten die Funktionen

$$v_1(x) = 1, \quad v_2(x) = x, \quad v_3(x) = e^x$$

im Raum $L^2([0,1])$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx.$$

Schritt 1: Normierung von v_1

$$\|v_1\|^2 = \int_0^1 1\, dx = 1 \quad \Rightarrow \quad w_1(x) = 1.$$

Schritt 2: Orthogonalisierung von v_2

$$\langle v_2, w_1 \rangle = \int_0^1 x\, dx = \tfrac{1}{2}.$$

$$u_2(x) = v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1 = x - \tfrac{1}{2}.$$

$$\|u_2\|^2 = \int_0^1 \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 dx = \tfrac{1}{12}.$$

$$w_2(x) = \frac{u_2}{\|u_2\|} = 2\sqrt{3}\left(x - \tfrac{1}{2}\right).$$

Schritt 3: Orthogonalisierung von v_3

$$\langle v_3, w_1 \rangle = \int_0^1 e^x dx = e - 1.$$

$$\langle v_3, w_2 \rangle = \int_0^1 e^x \cdot 2\sqrt{3}\left(x - \tfrac{1}{2}\right) dx = \sqrt{3}(3 - e).$$

$$u_3(x) = e^x - (e - 1) \cdot w_1 - \langle v_3, w_2 \rangle w_2.$$

$$u_3(x) = e^x + (6e - 18)x + (10 - 4e).$$

Normierung von u_3

Sei $u_3(x) = e^x + ax + b$ mit $a = 6e - 18$, $b = 10 - 4e$. Dann

$$\|u_3\|^2 = \int_0^1 (e^x + ax + b)^2 dx = \frac{-7e^2 + 40e - 57}{2}.$$

$$w_3(x) = \frac{u_3(x)}{\|u_3\|} = \frac{e^x + (6e - 18)x + (10 - 4e)}{\sqrt{\frac{-7e^2+40e-57}{2}}}.$$

Ergebnis

Die orthonormale Basis lautet:

$$w_1(x) = 1, \quad w_2(x) = 2\sqrt{3}\left(x - \tfrac{1}{2}\right), \quad w_3(x) = \frac{e^x + (6e - 18)x + (10 - 4e)}{\sqrt{\frac{-7e^2+40e-57}{2}}}.$$