

## Hausaufgabe 9: „Primzahlen“

### Aufgabe:

Wir betrachten die Menge  $M := \{a + b\sqrt{-5} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ .

- (1) Zeige, dass Addition und Multiplikation zweier Zahlen aus  $M$  wieder eine Zahl aus  $M$  liefern. (Wir sagen,  $(M, +, \cdot)$  ist ein kommutativer Ring mit 1.)
- (2) Definiere die Norm einer Zahl  $a + b\sqrt{-5} \in M$  als  $\|a + b\sqrt{-5}\| := a^2 + 5b^2$ . Zeige, dass für  $z_1, z_2 \in M$  die Identität  $\|z_1 \cdot z_2\| = \|z_1\| \cdot \|z_2\|$  gilt.
- (3) Wenn  $z \in M$  Norm 1 hat, muss  $z = \pm 1$  sein. Folgere, dass sich 2 sich nur trivial in Faktoren aus  $M$  zerlegen lässt: Wenn  $2 = z_1 \cdot z_2$  mit  $z_1, z_2 \in M$ , dann ist einer der Faktoren  $\pm 1$ . Das heißt, 2 ist eine  $M$ -Primzahl.
- (4) Folgere analog, dass 3 eine  $M$ -Primzahl ist.
- (5) Folgere analog, dass  $1 \pm \sqrt{-5}$  auch  $M$ -Primzahlen sind.
- (6) Wie kann man 6 in Faktoren aus  $M$  zerlegen?

---

### Rahmenbedingungen:

Umfang: Keine explizite Vorgabe

Abgabe: Als PDF-Datei im Whiteboard hochladen.

Abgabefrist: 22.12.2021; 12.00 Uhr

Zu beachten: Ihr Name muss auf allen Seiten lesbar sein (z.B. in Kopfzeile integrieren).