Zweitklausur

Lineare Algebra II – FU Berlin

19.03.2026

Name: ______________________
Matrikelnummer: ______________________

Hinweise:

- Bitte trennen Sie die Lösungsblätter von den "Schmierzetteln" und geben Sie nur die jeweils(!) unterschriebenen Lösungsblätter ab, die in die Bewertung eingehen sollen. Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen *oder* Ihrer Matrikelnummer.
- Die Klausur besteht aus vier Aufgaben. Überprüfen Sie bitte sofort, ob alle Aufgabentexte vorhanden sind. Die Klausurzeit geht von 8:15 bis 9:45 (90 Minuten).
- Die maximal erreichbare Gesamtpunktzahl beträgt 100 Punkte. Die jeweils mit einer Aufgabe maximal erreichbare Punktzahl ist angegeben. Mit 50 erreichten Punkten ist die Klausur bestanden.
- Verwenden Sie **keine Abkürzungen**! Geben Sie bei jeder Aufgabe den genauen Lösungsweg an. Lösungen ohne Lösungsweg und nicht eindeutig erkennbare Antworten werden als nicht vorhanden gewertet.
- Die Verwendung von Hilfsmitteln ist nicht zulässig. Dies gilt insbesondere für Taschenrechner und eigenes Schreibpapier (Sie erhalten von uns Papier).
- Der Termin zur Einsicht in die Beurteilung der Klausuren wird noch bekannt gegeben. Die korrigierten Klausuren werden von der FU einbehalten und nicht zurückgegeben.

Unterschrift: ______________________

Erreichte Punkte (vom Dozenten auszufüllen):

Aufgabe	1	2	3	4	Σ
max. Punkte	30	30	20	20	100
Punkte					

Note: ________

Aufgabenpaket 1: Diagonalisierbarkeit (30 P.)

Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

1.1 Zeigen Sie durch eine ausführliche Rechnung, dass $(8-\lambda)(2-\lambda)(\lambda^2 - 10\lambda + 16)$ das charakteristische Polynom von A ist! (Tipp: Laplace mit geschickter Wahl von Spalten und Zeilen)

1.2 Berechnen Sie die Eigenwerte von A!

1.3 Geben Sie die algebraischen Vielfachheiten von diesen Eigenwerten an! Begründen Sie!

1.4 Berechnen Sie die Eigenräume zu den Eigenwerten!

1.5 Geben Sie die geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte an!

1.6 Ist die Matrix A diagonalisierbar? Begründen Sie!

1.7 Geben Sie ohne Begründung das Minimalpolynom von A an!

1.8 Nennen Sie eine Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass αA eine volumentreue lineare Abbildung darstellt! Begründen Sie Ihre Wahl!

1.9 Stellt αA eine längen- und winkeltreue lineare Abbildung dar? Begründen Sie!

Aufgabenpaket 2: Ebene Geometrie (30 P.)

Es soll zunächst in der $\mathbb{R}^2$-Ebene gezeigt werden, dass eine Spiegelung an einer Spiegelachse, die durch den Ursprung verläuft und um den Winkel α gegen die x-Achse gedreht ist, einer Spiegelung an der x-Achse gefolgt von einer Drehung um den Ursprung um den Winkel 2α entspricht. Dieses Resultat soll dann genutzt werden, um die darstellende Matrix der Spiegelung zu berechnen. Führen Sie dazu folgende Schritte durch:

2.1 Begründen Sie, dass der Ausdruck $e^{i\alpha}\,\overline{e^{-i\alpha}z}$ in der komplexen Zahlenebene einer Spiegelung von $z \in \mathbb{C}$ an einer um α gedrehten Spiegelachse entspricht!

2.2 Formen Sie den Ausdruck aus 2.1 so um, so dass Sie die zu zeigende Aussage beweisen können!

2.3 Zeigen Sie ausführlich, wie man die darstellende Matrix $R_\beta \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ einer Rotation um den Ursprung um den Winkel β konstruiert! (Tipp: Skizze)

2.4 Zeigen Sie ausführlich, wie die darstellende Matrix $S \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ einer Spiegelung an der x-Achse aussieht!

2.5 Drücken Sie die Hintereinanderausführung der beiden Abbildungen R_β und S als Matrixprodukt aus und rechnen Sie das Ergebnis aus! Wählen Sie dabei $\beta = 2\alpha$.

Aufgabenpaket 3: Endliche Körper (20 P.)

Gegeben sei der endliche Körper mit drei Elementen $K = \{0, 1, 2\}$ und den beiden Verknüpfungen:

$\times$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

$+$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Berechnen Sie ausführlich die allgemeine Lösung des folgenden linearen Gleichungssystems in diesem Körper, wobei $x, y, z \in K$! (Hinweis: Bild-Kern-Algorithmus)

$$\begin{aligned} 2x + 2z &= 2 \\ x + 2y &= 2 \\ y + z &= 2. \end{aligned}$$

Sie dürfen verwenden, dass $x = 1, y = 2, z = 0$ eine spezielle Lösung ist.

Aufgabenpaket 4: Skalarprodukte (20 P.)

Für $u, v \in \mathbb{R}^n$ und eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ werde eine Bilinearform $\Phi_B(u, v) = u^\top B v$ definiert, $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

4.1 Kann es eine Matrix B geben, die eine orientierungsumkehrende lineare Abbildung darstellt, so dass $\Phi_B(u, v)$ ein Skalarprodukt ist? Begründen Sie!

4.2 Kann es eine Matrix B mit nicht-trivialem Kern geben, so dass $\Phi_B(u, v)$ ein Skalarprodukt ist? Begründen Sie!

4.3 Kann es eine positiv-definite Matrix B geben, so dass $\Phi_B(u, v)$ ein Skalarprodukt ist? Begründen Sie!