FU Berlin: SoSe 2024 (Mathematik I, Weber)

Abschlussklausur 31.07.2024, 08:15 bis 11:15

MATRIKELNUMMER: ________________________________

NAME: ____

UNTERSCHRIFT: ___________________________________

Allgemeine Hinweise zur Klausur:

1. Die Bearbeitungszeit beträgt 180 Minuten.

2. Bitte trennen Sie die Lösungsblätter von den übrigen Blättern und geben Sie nur die *jeweils(!)* unterschriebenen Lösungsblätter ab, die in die Bewertung eingehen sollen. Versehen Sie zudem jedes Blatt mit Ihrer Matrikelnummer.

3. Die Klausur besteht aus acht Aufgaben. Überprüfen Sie bitte sofort, ob alle Aufgabentexte vorhanden sind.

4. Die maximal erreichbare Gesamtpunktzahl beträgt 200 Punkte. Bei Erreichen von mindestens 100 Punkten haben Sie die Klausur bestanden. Die einzelnen Aufgaben sind nicht gleich gewichtet. Die jeweils mit einer Aufgabe maximal erreichbare Punktzahl ist auf dieser Seite unten angegeben.

5. Bitte verwenden Sie KEINE Abkürzungen! Schreiben Sie leserlich.

6. Nicht eindeutig erkennbare Antworten werden als nicht vorhanden gewertet.

7. Die Verwendung von Hilfsmitteln ist nicht zulässig. Dies gilt insbesondere für Taschenrechner und eigenes Schmierpapier.

8. Die korrigierten Klausuren werden von der FU einbehalten und nicht zurückgegeben.

Bewertung (vom Dozenten auszufüllen):

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**Summe**
Maximal erreichbare Punkte	**25**	**25**	**30**	**20**	**25**	**20**	**25**	**30**	**200**
Erreichte Punktzahl									

Resultierende Benotung der Klausur:

Aufgabe 1 (Potenzreihenansatz, 25 Punkte):

Gegeben sei folgende Anfangswertaufgabe einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$(x-1)f'' + f = 0, \qquad f(0) = 1, \qquad f'(0) = 0.$$

a) Nutzen Sie für das Berechnen der gesuchten Funktion f einen Potenzreihenansatz $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$. Welcher Entwicklungspunkt x_0 eignet sich für das obige Anfangswertproblem? Begründen Sie! Wie lauten die erste und die zweite Ableitung von f als Potenzreihe geschrieben?

b) Bestimmen Sie aufgrund der gegebenen Anfangswerte die Koeffizienten a_0 und a_1! Wie haben Sie diese berechnet?

c) Leiten Sie ausführlich mit Hilfe der Differentialgleichung eine Rekursionsformel für die weiteren Koeffizienten a_n her! Bestimmen Sie mit Hilfe der Formel a_2 und a_3!

Aufgabe 2 (Exakte Differentialgleichungen, 25 Punkte):

Gegeben sei folgende Differentialgleichung:

$$0 = (2x + y^2)dx + (2xy + 2)dy.$$

a) Ist diese Differentialgleichung exakt? Begründen Sie ausführlich!

b) Berechnen Sie ausführlich alle Lösungen obiger Gleichung! Sie dürfen die Lösungen als implizite Funktionen angeben. An welcher Stelle in Ihrer Rechnung haben Sie die „Variation der Konstanten“ verwendet?

c) Was müsste man machen, um von der impliziten Lösung zu einer expliziten Lösung zu gelangen? (Nur beschreiben, was prinzipiell zu tun wäre)

Aufgabe 3 (Residuensatz, 30 Punkte):

Berechnet werden soll der Wert des folgenden uneigentlichen Integrals:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-1}{x^3-1}\, dx.$$

a) Rechnen Sie ausführlich alle Nullstellen des Nenners des Integranden aus (Tipp: eine Nullstelle ist $x_1 = 1$)! Kürzen Sie nach der Faktorisierung des Nenners, wenn möglich, den Bruch im Integral!

b) Rechnen Sie ausführlich mit Hilfe des Residuenkalküls den Wert des Integrals aus!

c) Überlegen und begründen Sie: Sind alle Voraussetzungen für die Anwendung des Residuenkalküls bei dem obigen Integral erfüllt?

Aufgabe 4 (Konvergenzradius, 20 Punkte):

Rechnen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\,(x-1)^n$$

aus! Begründen Sie Ihr Ergebnis!

Aufgabe 5 (Regel von D L'Hospital, 25 Punkte):

Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von De L'Hospital den folgenden Grenzwert ausführlich:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^5}{\sqrt{e^x}}.$$

(Tipp: Vereinfachen Sie zunächst den Ausdruck $\sqrt{e^x}$)

Aufgabe 6 (Fixpunktiterationen, 20 Punkte):

Für eine Iterationsfunktion $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gelte für alle $x, y \in \mathbb{R}$ folgende Abschätzung:

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq 0.2\,|x - y|.$$

Weiterhin soll für den Startwert $x_0 = 1$ einer Iteration gelten, dass $\phi(x_0) = 2$. Nach wie vielen Schritten konvergiert das Iterationsverfahren sicher mit einer Genauigkeit von 0.001 gegen den Fixpunkt des Verfahrens? Begründen Sie! (Logarithmen müssen Sie nicht in Zahlenwerte umrechnen, es reicht, wenn Sie diese „stehen lassen".)

Aufgabe 7 (Stammfunktionen, 25 Punkte):

Berechnen Sie ausführlich alle Stammfunktionen:

$$\int x^2 \cdot sin(x)\,dx.$$

Aufgabe 8 (Symmetrieoperationen in $\mathbb{C}$, 30 Punkte):

a) Geben Sie die Koordinaten der Ecken eines gleichseitigen Dreiecks als komplexe Zahlen an! Erklären Sie, wie Sie auf die Koordinaten gekommen sind!

b) Überlegen Sie sich eine Symmetrieoperation, die neben einer Streckung um den Faktor 2 noch mindestens eine Rotation oder Translation enthält, bei der das gleichseitige Dreieck gleichseitig bleibt. Führen Sie diese Operation auf Ihren gewählten Koordinaten aus!

c) Mit Hilfe welcher Formel könnten Sie nun feststellen (Sie müssen diese Rechnung nicht durchführen), ob das in b) konstruierte Dreieck wirklich gleichseitig ist?

Viel Erfolg!