

$$\min \cos(x) + y \cdot (x + \pi)$$

$$\text{Sodass } 2xy + 1 = 0$$

$$\min_{x,y} \max_{\lambda} \underbrace{\cos(x) + y(x + \pi) + \lambda \cdot (2xy + 1)}_{L(x,y,\lambda)}$$

gesucht:
Sattelpunkt
1. Ordnung

$$\nabla L = \begin{pmatrix} -\sin(x) + y + 2\lambda y \\ x + \pi + 2\lambda x \\ 2xy + 1 \end{pmatrix}$$

$$H_L = \begin{pmatrix} -\cos(x) & 1 + 2\lambda & 2y \\ 1 + 2\lambda & 0 & 2x \\ 2y & 2x & 0 \end{pmatrix}$$

Kritische Punkte bestimmt man, indem $\nabla L = 0$ gesucht wird. Das Gleichungssystem

$$0 = -\sin(x) + y + 2\lambda y \quad 0 = x + \pi + 2\lambda x \quad 0 = 2xy + 1$$

kann man mit Hilfe eines Newton-Verfahrens lösen, man findet einen Punkt (z.B.)

$$x_0 \approx -3,287454$$

$$y_0 \approx 0,152093$$

$$\lambda_0 \approx -0,022185$$

Um die Art des kritischen Punktes zu bestimmen, bildet man die Hesse-Matrix von L an der Stelle $H_c(x_0, y_0, z_0)$:

$$\approx \begin{pmatrix} 0,9894 & 0,9556 & 0,3042 \\ 0,9556 & 0 & -6,5749 \\ 0,3042 & -6,5749 & 0 \end{pmatrix}$$

Von dieser Matrix berechnet man die Eigenwerte. Tatsächlich ist es ein Sattelpunkt erster Ordnung. Das ist jetzt also ein Kandidat für ein lokales Minimum des Ausgangsproblems.

(Die Bedingungen sind nicht hinreichend, aber tatsächlich ist der gefundene Punkt ein Minimum)