FU Berlin: SoSe 2019 (Mathematik 1, Weber)

Übungszettel Nr. 4, Abgabe 15.05.2019

Lernziel: Die Fixpunktiteration als Lösungsmethode von mathematischen Gleichungen verstehen. Grenzwerte von Folgen, Rekursionen und Fixpunktiterationen ausrechnen können. Einige Bedingungen kennen, unter denen eine Fixpunktiteration konvergiert (funktioniert).

Aufgabe 1: **(Fixpunktiteration als Lösungsmethode)**

Sie haben in der Vorlesung eine Formel kennen gelernt, mit der der Taschenrechner die k-ten Wurzeln einer komplexen Zahl ausrechnen kann. Führen Sie drei Schritte der Fixpunktiteration zur Bestimmung einer dritten Wurzel von 4 aus. Wählen Sie zunächst einen reellwertigen Startpunkt für die Iteration und in einem zweiten Experiment einen komplexwertigen Startpunkt aus.

Aufgabe 2: **(Grenzwerte von Folgen/Rekursionen ausrechnen können)**

a) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+4\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ Hinweis: Nutzen Sie die Rechengesetze für Grenzwerte.

b) Berechnen Sie den Grenzwert von $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(n)}{\ln(n)}$. Hinweis: Schreiben Sie $\frac{\sin(n)}{\ln(n)}$ als Produkt von zwei Termen. Der eine Term ist beschränkt, der andere Term ist eine Nullfolge. Stimmt das? In diesem Falle wäre die Folge nämlich eine Nullfolge.

c) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+2n}{\sqrt{n^4+1}}$ Hinweis: Ziehen Sie zunächst n^4 im Nenner vor die Wurzel (als n^2) und "kürzen" Sie n^2 aus dem Bruch. Dann wenden Sie wieder die Grenzwertgesetze an.

d) Durch eine Rekursionsvorschrift sei eine Folge definiert: $a_{n+1}=\frac{2}{a_n^2+1}$. Nehmen wir mal an, dass diese Folge für einen festgelegten reellen Anfangswert $a_0\in\mathbb{R}$ konvergiert. Nennen Sie unter dieser Voraussetzung einen möglichen Grenzwert dieser Folge. Ist dieser Grenzwert bei einem reellen Anfangswert der einzig mögliche? Hinweis: Falls ein Grenzwert a existiert, müssen sowohl die Folge (a_n) als auch die Folge (a_{n+1}) gegen diesen konvergieren. Daraus ergibt sich, dass $a=2/(a^2+1)$ gelten muss.

Aufgabe 3: (Existenz eines eindeutigen Fixpunktes)

a) Um z.B. die Gleichung $2 - x^2 = e^x$ zu lösen, könnte man auf beiden Seiten der Gleichung logarithmieren, also $\ln(2 - x^2) = x$ schreiben. Dieses stellt eine Fixpunktgleichung mit Fixpunktfunktion $\phi(x) = \ln(2 - x^2)$ dar. Starten Sie mit $x_0 = 0{,}2$ und führen Sie drei Schritte der Fixpunktiteration $x_{n+1} = \phi(x_n)$ durch.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $\phi(x) = \ln(2 - x^2)$ im Intervall $x \in [0;1]$ genau einen Fixpunkt besitzt. Hinweis: Die Ableitung lautet $\phi'(x) = \frac{2x}{x^2-2}$. Zu beantworten ist also (unter anderem) die Frage, ob im Intervall $x \in [0;1]$ die Gleichung $1 = \frac{2x}{x^2-2}$ eine Lösung besitzt.

Aufgabe 4: (Genauigkeit des Iterationsergebnisses)

Sei $\phi(x): [0;1] \to [0;1]$ eine stetige Fixpunktfunktion auf dem abgeschlossenen Intervall $[0;1]$ und für alle $x, y \in [0;1]$ gelte die Kontraktionsbedingung:

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq \frac{1}{7}|x - y|.$$

Angenommen für den Startpunkt $x_0 = 0{,}75$ erhält man $x_1 = \phi(x_0) = 0{,}5$. Konvergiert die Fixpunktiteration gegen einen Fixpunkt? Kann es auf dem Intervall $[0;1]$ mehrere Fixpunkte geben? Wie viele Schritte der Fixpunktiteration sind maximal nötig, um den entsprechenden Fixpunkt auf 5 Nachkommastellen genau zu ermitteln?

Viel Erfolg!