Aufgabe 1

a) $f(x) = x^2 + 2x + 1$ Regel. $\int x^k dx = \frac{1}{k+1} x^{k+1} + C$

$\int f(x) dx = \frac{1}{3} x^3 + x^2 + x + c$

b) $f(x) = e^x$ Literatur

$\int f(x) dx = e^x + c$

c) $f(x) = x^{-2}$ Regel $\int x^k dx = \frac{1}{k+1} x^{k+1} + C$

$\int f(x) dx = -\frac{1}{x} + c$

d) $f(x) = \cos(x)$ denn $\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x)$

$\int f(x) dx = \sin(x) + c$

e) $f(x) = \sin(x)$ denn $\frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x)$

$\int f(x) dx = -\cos(x) + c$

f) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ Literatur

$\int f(x) dx = \arctan(x) + c$

g) $f(x) = \tan(x)$ Literatur

$\int f(x) dx = \ln(|\cos(x)|) + c$

h) $f(x) = \operatorname{artanh}(x)$ Literatur

$\int f(x) dx = x \cdot \operatorname{artanh}(x) + \frac{1}{2} \ln(1 - x^2) + c$

i) $f(x) = y x^2 + \sin(g)$ y und sin(g) sind aus Sicht von x konstante Vorfaktoren

$\int f(x) dx = \frac{y}{3} x^3 + x \cdot \sin(g) + C$

j) $f(x) = \frac{x^k}{k!}$ Regel: $\int x^k dx = \frac{1}{k+1} x^{k+1} + C$

$\int f(x) dx = \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$

Aufgabe 2

a) $\int \underset{v}{\sin(x)} \underset{u'}{\cos(x)}\,dx = \underset{u \cdot v}{\sin^2(x)} - \int \underset{u \cdot v'}{\sin(x) \cdot \cos(x)}\,dx$

$\Rightarrow \quad 2 \cdot \int \sin(x)\cos(x)\,dx = \sin^2(x) + C$

$\Rightarrow \quad \int \sin(x)\cos(x)\,dx = \frac{1}{2}\sin^2(x) + C$

b) $\int \underset{u'}{e^x} \underset{v}{(2-x^2)}\,dx = e^x \cdot (2-x^2) + \int 2e^x x\,dx$

$= e^x \cdot (2-x^2) + 2xe^x - 2\int e^x\,dx$

$= e^x(2-x^2) + 2xe^x - 2e^x + C$

c) $\int \underset{u'}{e^x} \underset{v}{\sin(3x)}\,dx = e^x \sin(3x) - \int e^x \cdot 3 \cdot \cos(3x)\,dx$

$= e^x \sin(3x) - \left(e^x \cdot 3 \cdot \cos(3x) + \int e^x \cdot 9\sin(3x)\,dx\right)$

$\Rightarrow 10 \int e^x \sin(3x)\,dx = e^x \sin(3x) - 3e^x \cos(3x) + C$

$\Leftrightarrow \quad \int e^x \sin(3x)\,dx = \frac{e^x}{10}\left(\sin(3x) - 3\cos(3x)\right) + C$

Aufgabe 4

a) $(x^7 - x^5 + 9x^4 - 5x^3 - 2x^2 - 5x + 7) : (x^5 - x^4 - x + 1) = x^2 + x + \frac{REST}{x^5 - x^4 - x + 1}$

$-(x^7 - x^6 \qquad -x^3 + x^2)$

$x^6 - x^5 + 9x^4 - 4x^3 - 3x^2 - 5x + 7$

$-(x^6 - x^5 \qquad -x^2 + x)$

$9x^4 - 4x^3 - 2x^2 - 6x + 7$ REST

siehe YOUTUBE-Video zum ersten Übungszettel!

b) $x^5 - x^4 - x + 1 = (x-1)^2(x+1)(x^2+1)$

um diese Zerlegung herauszufinden, muss man die Nullstellen von $x^5 - x^4 - x + 1$ finden

Diese sind (auf der rechten Seite ablesbar) $\{1; -1; i; -i\}$

gefunden werden können die Nullstellen mittels Newton-Verfahren

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^5 - x_n^4 - x_n + 1}{5x_n^4 - 4x_n^3 - 1}$$

$$= \frac{(5x_n^5 - 4x_n^4 - x_n) - (x_n^5 - x_n^4 - x_n + 1)}{5x_n^4 - 4x_n^3 - 1}$$

$$= \frac{4x_n^5 - 3x_n^4 - 1}{5x_n^4 - 4x_n^3 - 1}$$

Der erste Bruch wird erweitert mit

$(x-1)(x+1)(x^2+1) = (x^2-1)(x^2+1) = x^4 - 1$ $\qquad A\,(x^4-1)$

Der zweite Bruch wird erweitert mit

$(x+1)(x^2+1) = x^3 + x^2 + x + 1$ $\qquad B\,(x^3+x^2+x+1)$

Der dritte Bruch wird erweitert mit

$(x-1)^2(x^2+1) = (x^2-2x+1)(x^2+1)$

$= x^4 - 2x^3 + x^2 + x^2 - 2x + 1 = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$ $\qquad C\,(x^4-2x^3+2x^2-2x+1)$

Der letzte Bruch wird erweitert mit

$(x-1)^2(x+1) = (x^2-2x+1)(x+1)$

$= x^3 - 2x^2 + x + x^2 - 2x + 1 = x^3 - x^2 - x + 1$

und $(Dx+E)(x^3-x^2-x+1) = Dx^4 - Dx^3 - Dx^2 + Dx + Ex^3 - Ex^2 - Ex + E$ $\qquad D, E$

Nun weiß man z.B., dass x^4 den Vorfaktor 9 hat auf der linken Seite der Gleichung (3c) im Zähler. Also durch Vergleich mit dem zweiten Bruch:

$$A \cdot x^4 + Cx^4 + Dx^4 \quad \text{muss also } 9x^4$$

ergeben oder anders formuliert

$$\Rightarrow A + C + D = 9$$

Dieses Verfahren nennt sich „Koeffizienten-Vergleich" und führt zu folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned} A + C + D &= 9 && \text{f. } x^4 \\ B - 2C + E - D &= -4 && \text{für } x^3 \\ B + 2C - D - E &= -2 && \text{für } x^2 \\ B - 2C + D - E &= -6 && \text{für } x \\ -A + B + C + E &= 7 && \text{für die Konstante} \end{aligned}$$

Die Lösung ist $A=2, B=1, C=3, D=4, E=5$, wie man durch Einsetzen der gegebenen Werte prüfen kann.

d) $$\int x^2 + x + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{3}{x+1} + \frac{4x}{x^2+1} + \frac{5}{x^2+1} \, dx \qquad (\text{Literatur!})$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2\ln(|x-1|) - \frac{1}{x-1} + 3\ln(|x+1|)$$

$$+ 2\ln(|x^2+1|) + 5\arctan(x) + C$$

Aufgabe 3

a) $\int 3t^6 + 6t^3 \, dt$

$= \frac{3}{7} t^7 + \frac{3}{2} t^4 + C$ $\qquad t = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$

$= \frac{3}{7} (x^{\frac{1}{3}})^7 + \frac{3}{2} (x^{\frac{1}{3}})^4 + C = \frac{3}{7} x^{\frac{7}{3}} + \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{4}{3}} + C$

b) $\int \frac{1}{5 + 3\cos(x)} \, dx$

$\boxed{\begin{aligned} &t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \\ &\Rightarrow \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ &dx = \frac{2}{1+t^2} \, dt \end{aligned}}$

$= \int \frac{1}{5 + 3\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \underbrace{\frac{2}{1+t^2} \, dt}_{= dx}$

$= \int \frac{2}{2t^2 + 8} \, dt = \int \frac{1}{t^2 + 4} \, dt$

$= \frac{1}{2} \arctan \frac{t}{2} + C = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{1}{2} \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + C$

Literatur! $\qquad$ Rücksubstitution