Aufgabe 1:

a) Sowohl x^2-x-2 als auch x^2-5x+6 gehen gegen 0 für $x \to 2$, daher kann man De l'Hospital anwenden:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 2} \frac{2x-1}{2x-5} = \frac{3}{-1} = -3$$

b) Voraussetzungen sind erfüllt (s.o.):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{2} = \frac{1}{2}$$

c) Voraussetzungen sind erfüllt (s.o.):

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{2x} \underset{1b)}{=} \frac{1}{2}$$

Aufgabe 2:

a)
$$\lim_{x\to \infty} x \cdot \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2}}{-\frac{1}{x^2}}$$

Zähler und Nenner sind Nullfolgen $\Rightarrow$ De l'Hospital anwendbar

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2\cdot(x-1)}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{2}{1} = 2$$

durch x^3 kürzen $\Rightarrow$ nur höchste Koeffizienten bleiben übrig (siehe Nr. 4 2k))

Aufgabe 2b)

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x}$$ auf einen Nenner bringen

$$= \lim_{x \to 0} - \frac{\ln(1+x) - x}{\ln(1+x) \cdot x} = \lim_{x \to 0} - \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{\frac{x}{x+1} + \ln(x+1)}$$

De L'Hospital

$$= \lim_{x \to 0} - \frac{\frac{1 - 1 - x}{1+x}}{\frac{x + (1+x)\ln(x+1)}{1+x}} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x + (1+x)\ln(x+1)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{1 + \ln(x+1) + 1} = \frac{1}{2}$$

De L'Hospital

Aufgabe 3)a):

$$f(x) = \sqrt{1+x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(x+1)^{3/2}}$$

$$f'''(x) = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{(x+1)^{5/2}}$$

$$f''''(x) = -\frac{15}{16} \frac{1}{(x+1)^{7/2}}$$

$$t_4(x) = \frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \frac{f''''(0)}{4!} x^4$$

$$= 1 + \frac{1}{2} x - \frac{1}{8} x^2 + \frac{1}{16} x^3 - \frac{5}{128} x^4$$

b) $t_4(0{,}5) \approx 1{,}2241$

$\sqrt{1{,}5} \approx 1{,}2247$

Aufgabe 3(c)

$$f(x) = \ln(x) \qquad f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$
$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$t_2(x) = \frac{f(1)}{0!} + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2$$

$$= 0 + 1\cdot(x-1) - \frac{1}{2}\cdot(x-1)^2$$ ← so

$$= x - 1 - \left(\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}$$ oder so

Aufgabe 4)

Restglied:

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

in Aufgabe 3a) ist $n = 4$ und $x_0 = 0$

und $\xi \in [0;x]$

in Aufgabe 3(c) ist $n = 3$ und $x_0 = 1$

und $\xi \in [x;1]$