FU Berlin: SoSe 2019 (Mathematik 1, Weber)

Übungszettel Nr. 8, Abgabe 12.06.2019

Lernziele: Verschiedene Kriterien kennen, mit denen man die Konvergenz einer Reihe zeigen kann (merken Sie sich nur: Quotientenkriterium und Wurzelkriterium). Wissen, dass reelle Funktionen f(x) (z.B. die Exponentialfunktion) auch für komplexe x definiert werden kann, wenn man die Reihenentwicklung der Funktion kennt. Den Konvergenzradius einer Potenzreihe ausrechnen können (Quotientenkriterium und Wurzelkriterium).

Aufgabe 1: (Grenzwerte von Reihen)

a) Zeigen Sie, dass die Folge ne^{-n} für $n \to \infty$ eine Nullfolge ist. Hinweis: Das machen Sie, indem Sie nach dem Quotientenkriterium zeigen, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$ konvergiert. Dann wissen Sie, dass die Summanden der Reihe gegen Null gehen müssen.

b) Zeigen Sie nach dem Wurzelkriterium, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ konvergiert.

c) Zeigen Sie mit dem Leibniz-Kriterium, dass die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln(n)}$ konvergiert.

d) Zeigen Sie mit dem Verdichtungskriterium, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert.

e) Überlegen Sie sich für die Teilaufgaben a)-d) jeweils eine eigene Übungsaufgabe, die mit der gleichen mathematischen Methode gelöst werden kann, wie das jeweilige "Vorbild". Alle obigen Aufgaben stammen aus dem Gelben Rechenbuch, Band 1.

Aufgabe 2: (Komplexe Funktionen durch Potenzreihen definieren)

Im Kapitel der komplexen Zahlen haben wir die Eulersche Formel verwendet, um zwischen der kartesischen Darstellung und der Darstellung in Polarkoordinaten umzurechnen (LINK). Diese Formel lautet:

$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha).$$

Die Exponentialfunktion lässt sich auch als Ergebnis einer Reihe schreiben. Es gilt die folgende Potenzreihendarstellung (LINK):

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

wobei $x \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl sein darf. Um die Eulerformel zu zeigen, setzen Sie statt x jetzt $i\alpha$ in die Reihe ein, wobei α nun irgendein Winkel sein darf (irgendeine reelle Zahl). Überlegen Sie sich wie die einzelnen Summanden der Reihe für $e^{i\alpha}$ aussehen.

Sortieren Sie die Summanden nach Imaginär- und Realteil. Sie erhalten die Form $e^{i\alpha} = \sum "was?" + i \cdot \sum "was?"$. Diese Reihen stellen tatsächlich Kosinus und Sinus dar?

Aufgabe 3: (Konvergenz von Taylorreihen)

Schauen Sie in der Literatur (z.B. "Handbook of Mathematical, Scientific, and Engeneering -- Formulas, Tables, Functions, Graphs, Transforms", Research and Education Association) nach, wie die Taylorreihenentwicklung der folgenden Funktionen aussieht und aus welchem Bereich dabei x stammen darf:

a) sinh(x) **b)** tan(x) **c)** tanh(x) **d)** $e^{sin(x)}$ **e)** $\frac{\ln(1+x)}{1+x}$

Aufgabe 4: **(Konvergenzradius einer Potenzreihe berechnen)**

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ konvergiert, wenn das Wurzelkriterium gilt. Also konvergiert sie, wenn $q = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} = |x-x_0| \left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right)$ eine Zahl ergibt, die echt kleiner als 1 ist. Also wenn $|x-x_0| < \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$. Wenn q größer als 1 ist, dann divergiert die Reihe. Der Konvergenzradius r der Reihe lässt sich also errechnen als

$$r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

a) Wie sieht der Konvergenzradius aus, wenn man statt des Wurzelkriteriums das Quotientenkriterium ansetzt?

b) Für die Taylorreihe einer Funktion f am Entwicklungspunkt x_0 gilt $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$. Wie sieht also der Konvergenzradius der Taylorentwicklung von $f(x) = \frac{1}{x}$ am Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ nach dem Quotientenkriterium aus?

Hinweis für $f(x) = \frac{1}{x}$ gilt $f^{(n)}(x) = n!\, x^{-(n+1)}(-1)^n$.

Viel Erfolg!