

Übungszettel Nr. 1, keine Abgabe (erst ab dem nächsten Zettel)

Lernziele: Wiederholungsaufgaben der komplexen Zahlen als Beispiel für einen Körper, Lernen der Begriffe "Vektorraum" und "Quaternion" (Schiefkörper)

Aufgabe 1: (Wdh., Grundrechenarten mit komplexen Zahlen) Berechnen Sie jeweils die Summe, die Differenz, das Produkt und den Quotient der folgenden komplexen Zahlen w und z . Stellen Sie das Ergebnis in der Form $x+iy$ dar.

a) $z = 2 + 4i, \quad w = 3 - i$

b) $z = -i + 5, \quad w = -i$

c) $z = 2e^{i\pi/3}, \quad w = \frac{1}{2}e^{i\pi/2}$ Hinweis: $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}, \quad \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $z =$ eine komplexe Zahl mit Argument 270° und Betrag 2.
 $w =$ eine komplexe Zahl mit Realteil 4 und Imaginärteil 2.

Aufgabe 2: (Wdh., Wurzelrechnung mit komplexen Zahlen) Berechnen Sie alle komplexwertigen Lösungen der Gleichung

$$w^3 = \frac{8\sqrt{3}}{2} + 4i.$$

Hinweis: Am besten rechnen Sie zunächst die rechte Seite der Gleichung in Polarkoordinaten um. Danach berechnen Sie die dritten Wurzeln gemäß der entsprechenden [Formel](#).

Aufgabe 3: (Beispiele für Vektorräume)

a) Ein Vektorraum ist eine etwas schwächere algebraische Struktur als ein Körper. Welche Unterschiede bestehen zwischen diesen beiden algebraischen Strukturen? Machen Sie sich anhand der Definitionen klar, dass jeder Körper auch ein Vektorraum (der Grundkörper ist der Körper selbst) ist. Ist auch jeder Vektorraum ein Körper?

b) Zwei reellwertige Funktionen $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ lassen sich addieren, indem man einfach ihre Funktionswerte addiert $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$. Sie lassen sich auch mit einer reellen Zahl $a \in \mathbb{R}$ multiplizieren $(a \cdot f)(x) = a \cdot f(x)$, so dass jeweils wieder reellwertige Funktionen entstehen. Bilden reellwertige Funktionen tatsächlich einen Vektorraum über den reellen Zahlen?

Aufgabe 4: (Quaternionen)

a) Lesen Sie die Grundrechenarten für Quaternionen im entsprechenden [Wikipedia-Artikel](#) nach und berechnen Sie das Produkt der beiden Quaternionen

$$(4j - 2k) \text{ und } (1 - i).$$

b) Vertauschen Sie in a) die Reihenfolge der Faktoren und berechnen Sie erneut das Produkt.

c) Nennen Sie das neutrale Element der Addition und das der Multiplikation von Quaternionen!

d) Gibt es zu jedem Quaternion (außer der "0") ein inverses Element bezüglich der Multiplikation?

e) Bilden Addition und Multiplikation von Quaternionen abelsche Gruppen?

Viel Erfolg!