

# Mathe 2 - Zettel 11

1.) Berechnung mittlerer Normalsstand

Wellenfunktion des Elektrons:  $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-|x| \cdot \frac{1}{a}}$

↳ quantenmechan. Zustand des Teilchens

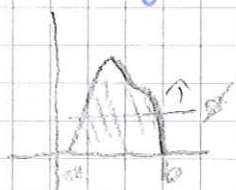
↳ Betragsquadrat  $\Rightarrow$  Aufenthaltswahrsch.  $\psi^* \psi$

$a$  ... erste Bohr'sche Radius (niedrigster E-Zustand)

$x$  ... dreidimensionaler Vektor ( $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ )

$$\psi^* \psi = \frac{1}{\pi a^3} \left( e^{-|x| \cdot \frac{1}{a}} \right)^2 = \frac{1}{\pi a^3} e^{-\frac{2|x|}{a}}$$

Berechnung des Mittelwert mittels Integral:



$$\overline{f(x)} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

$$= \int_a^b f(x) \overset{\text{Wert}}{\downarrow} \frac{1}{b-a} dx$$

$\uparrow$   
Wahrscheinlichkeit

Wahrscheinlichkeit des Auftretens

$$\text{hier: } A = \int_{\mathbb{R}^3} |x| \frac{1}{\pi a^3} e^{-\frac{2|x|}{a}} dx \stackrel{\text{Wert (radius)}}{=} \frac{1}{\pi a^3} \int_{\mathbb{R}^3} |x| e^{-\frac{2|x|}{a}} dx$$

a) einfachere Berechnung durch Koordinatentransformation (Kugelkoordination)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} f(r, \vartheta, \varphi) \left| \frac{d(x_1, x_2, x_3)}{d(r, \vartheta, \varphi)} \right| r^2 dr d\vartheta d\varphi$$

Determinante der Jacobi-Matrix

# Berechnen der Determinante der Jacobi-Matrix

Regelbund.

S. Aufgaben-  
2. Teil

$$\text{Jacobi-Matrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \vartheta} & \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial \vartheta} & \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x_3}{\partial r} & \frac{\partial x_3}{\partial \vartheta} & \frac{\partial x_3}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

$$\frac{d(x_1, x_2, x_3)}{d(r, \vartheta, \varphi)}$$

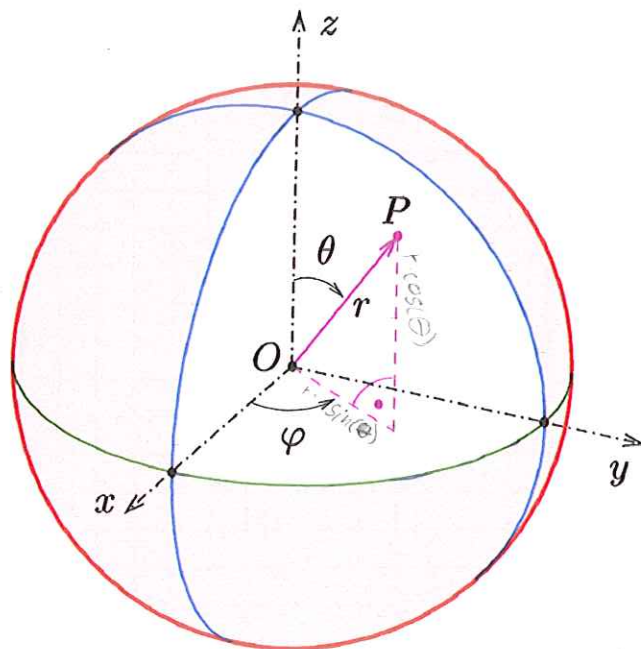
mit  $x_1 = x = r \cdot \sin(\vartheta) \cos(\varphi)$

$x_2 = y = r \cdot \sin(\vartheta) \sin(\varphi)$

$x_3 = z = r \cdot \cos(\vartheta)$

$x_3 \rightarrow$  Projektion

$x_1, x_2 \rightarrow$  Doppelp Projektion



Einsetzen Abl. in J.-Matrix:

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \sin(\vartheta) \cdot \cos(\varphi) & r \cdot \cos(\vartheta) \cdot \cos(\varphi) & -r \cdot \sin(\vartheta) \cdot \sin(\varphi) \\ \sin(\vartheta) \cdot \sin(\varphi) & r \cdot \cos(\vartheta) \cdot \sin(\varphi) & r \cdot \sin(\vartheta) \cdot \cos(\varphi) \\ \cos(\vartheta) & -r \cdot \sin(\vartheta) & 0 \end{pmatrix}$$

## Berechnen der Determinante der Jacobi-Matrix

$\hookrightarrow$  Laplace-Entwicklung nach 3. Zeile

$$\det(J) = + \cos(\vartheta) \begin{vmatrix} r \cdot \cos(\vartheta) \cdot \cos(\varphi) & -r \cdot \sin(\vartheta) \cdot \sin(\varphi) \\ r \cdot \cos(\vartheta) \cdot \sin(\varphi) & r \cdot \sin(\vartheta) \cdot \cos(\varphi) \end{vmatrix}$$

$$- -r \cdot \sin(\vartheta) \begin{vmatrix} \sin(\vartheta) \cdot \cos(\varphi) & -r \cdot \sin(\vartheta) \cdot \sin(\varphi) \\ \sin(\vartheta) \cdot \sin(\varphi) & r \cdot \sin(\vartheta) \cdot \cos(\varphi) \end{vmatrix}$$

$$+ 0 \begin{vmatrix} \sin(\vartheta) \cdot \cos(\varphi) & r \cdot \cos(\vartheta) \cdot \cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta) \cdot \sin(\varphi) & r \cdot \cos(\vartheta) \cdot \sin(\varphi) \end{vmatrix}$$



$$\begin{aligned}
\det(J) &= \cos(\vartheta) \left[ r^2 \sin(\vartheta) \cdot \cos(\vartheta) \cdot \cos^2(\varphi) + r^2 \sin(\vartheta) \cdot \cos(\vartheta) \cdot \sin^2(\varphi) \right] \\
&\quad + r \cdot \sin(\vartheta) \left[ r \cdot \sin^2(\vartheta) \cdot \cos^2(\varphi) + r \cdot \sin^2(\vartheta) \cdot \sin^2(\varphi) \right] \\
&= \cos(\vartheta) \left[ r^2 \sin(\vartheta) \cdot \cos(\vartheta) (1 - \sin^2(\varphi)) + r^2 \sin(\vartheta) \cdot \cos(\vartheta) \cdot \sin^2(\varphi) \right] \\
&\quad + r \cdot \sin(\vartheta) \left[ r \cdot \sin^2(\vartheta) (1 - \sin^2(\varphi)) + r \cdot \sin^2(\vartheta) \cdot \sin^2(\varphi) \right] \\
&= \cos(\vartheta) \left[ r^2 \sin(\vartheta) \cdot \cos(\vartheta) \cdot 1 \right] \\
&\quad + r \cdot \sin(\vartheta) \left[ r \cdot \sin^2(\vartheta) \cdot 1 \right] \\
&= r^2 \sin(\vartheta) \cdot \cos^2(\vartheta) + r^2 \sin^3(\vartheta) \\
&= r^2 \sin(\vartheta) \cdot (1 - \sin^2(\vartheta)) + r^2 \sin^3(\vartheta) \\
&= r^2 \sin(\vartheta) - r^2 \sin^3(\vartheta) + r^2 \sin^3(\vartheta) \\
&= r^2 \sin(\vartheta)
\end{aligned}$$

Außerdem: Substitution von  $|x|$

$$\begin{aligned}
|x| &= \left| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} r \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \\ r \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \\ r \cos(\vartheta) \end{pmatrix} \right| \\
&= \sqrt{r^2 \sin^2(\vartheta) \cos^2(\varphi) + r^2 \sin^2(\vartheta) \sin^2(\varphi) + r^2 \cos^2(\vartheta)} \\
&= \sqrt{r^2 \sin^2(\vartheta) (1 - \sin^2(\varphi)) + r^2 \sin^2(\vartheta) \sin^2(\varphi) + r^2 \cos^2(\vartheta)} \\
&= \sqrt{r^2 \sin^2(\vartheta) + r^2 \cos^2(\vartheta)} = r \sqrt{\underbrace{\sin^2(\vartheta) + \cos^2(\vartheta)}_1} = r
\end{aligned}$$

Außerdem: Integrationsgrenzen anpassen

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

↪



$$\vartheta = \arccos\left(\frac{x_3}{r}\right)$$

↪

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \lim_{x_3 \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{x_3}{r}\right) = \pm 1$$

$$\Rightarrow$$

$$\arccos(1) = 0$$

$$\arccos(-1) = \pi$$

S. auch Skizze

$\varphi$  ↪ je nach  $x_1$  und  $x_2$

↪



von dx-Subst.

$$\frac{1}{\pi a^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |x| e^{-\frac{2|x|}{a}} dx = \frac{1}{\pi a^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} r \cdot e^{-\frac{2r}{a}} \cdot \underbrace{r^2 \sin(\vartheta)}_{\text{von dx-Subst.}} dr d\vartheta d\varphi$$



# 1b) Berechnung des Integrals (3. Versuch)

auch als Multiplikation von Integralen beschreibbar

$$A = \frac{1}{\pi a^3} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^3 \cdot e^{-\frac{2r}{a}} \cdot \sin(\vartheta) dr d\vartheta d\varphi$$

$$= \frac{1}{\pi a^3} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^3 e^{-\frac{2r}{a}} \cdot \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi dr$$

$$= \frac{1}{\pi a^3} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} r^3 e^{-\frac{2r}{a}} [-\cos(\vartheta)]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} d\varphi dr$$

$$= \frac{1}{\pi a^3} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} r^3 e^{-\frac{2r}{a}} \underbrace{\left[ \overset{-\cos}{-\cancel{(-1)}} - \overset{-\cos}{-\cancel{(1)}} \right]}_2 d\varphi dr$$

$$= \frac{2}{\pi a^3} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} r^3 e^{-\frac{2r}{a}} d\varphi dr = \frac{2}{\pi a^3} \int_0^\infty r^3 e^{-\frac{2r}{a}} [\varphi]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} dr$$

$$= \frac{2}{\pi a^3} \int_0^\infty r^3 e^{-\frac{2r}{a}} (2\pi - 0) dr = \frac{4}{a^3} \int_0^\infty r^3 e^{-\frac{2r}{a}} dr$$

partielle Integration:  $\int u v' = u v - \int u' v$  unbestimmt

↳ für bestimmte Integrale:  $\int_a^b u v' = u v \Big|_a^b - \int_a^b u' v$

$$\left| \begin{array}{l} u' = 3r^2 \\ v = -\frac{a}{2} \cdot e^{-\frac{2r}{a}} = -\frac{a}{2} \cdot e^{-\frac{2}{a} \cdot r} \end{array} \right.$$

$$= \frac{4}{a^3} \left[ \left[ r^3 \cdot \left( -\frac{a}{2} \cdot e^{-\frac{2r}{a}} \right) \right]_{r=0}^{r=\infty} - \int_0^\infty 3r^2 \cdot \left( -\frac{a}{2} \cdot e^{-\frac{2r}{a}} \right) dr \right]$$

$$= \frac{4}{a^3} \left[ \underbrace{\left( \overset{0}{\infty^3 \cdot \overset{0}{e^{-\infty}} \cdot \frac{a}{2}} - 0 \cdot e^{-\frac{a}{2}} \right)}_0 + \frac{a}{2} \int_0^\infty 3r^2 e^{-\frac{2r}{a}} dr \right]$$



$$= \frac{4}{a^3} \cdot \frac{3a}{2} \int_0^{\infty} r^2 \cdot e^{-\frac{2r}{a}} dr = \frac{6}{a^2} \int_0^{\infty} r^2 e^{-\frac{2r}{a}} dr$$

partielle Integration

$$\int_0^{\infty} u v' = u v \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} u' v$$

$$\left| \begin{array}{l} u = r^2 \\ v' = -\frac{2}{a} e^{-\frac{2r}{a}} \end{array} \right.$$

$$= \frac{6}{a^2} \left[ \underbrace{\left[ r^2 \cdot \left(-\frac{a}{2}\right) \cdot e^{-\frac{2r}{a}} \right]_{r=0}^{r=\infty}}_{\text{wie vorher} = 0} - \int_0^{\infty} 2r \cdot \left(-\frac{a}{2}\right) e^{-\frac{2r}{a}} dr \right]$$

$$= \frac{6}{a^2} \left[ 0 + a \int_0^{\infty} r e^{-\frac{2r}{a}} dr \right] = \frac{6}{a} \int_0^{\infty} r e^{-\frac{2r}{a}} dr$$

partielle Integration

$$\int_0^{\infty} u v' = u v \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} u' v$$

$$\left| \begin{array}{l} u = r \\ v' = -\frac{2}{a} e^{-\frac{2r}{a}} \end{array} \right.$$

$$= \frac{6}{a} \left[ \underbrace{\left[ r \cdot \left(-\frac{a}{2}\right) \cdot e^{-\frac{2r}{a}} \right]_{r=0}^{r=\infty}}_{\text{wie vorher} = 0} - \int_0^{\infty} 1 \cdot \left(-\frac{a}{2}\right) e^{-\frac{2r}{a}} dr \right]$$

Wie vorher = 0

$$= \frac{6}{a} \left[ 0 + \frac{a}{2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{2r}{a}} dr \right] = 3 \int_0^{\infty} e^{-\frac{2r}{a}} dr$$

$$= 3 \left[ \left(-\frac{a}{2}\right) \cdot e^{-\frac{2r}{a}} \right]_{r=0}^{r=\infty} = 3 \left( \left(-\frac{a}{2}\right) \cdot \overset{0}{e^{-\infty}} - \left(-\frac{a}{2}\right) \cdot \overset{1}{e^0} \right)$$

$$= 3 \left( 0 + \frac{a}{2} \cdot 1 \right) = \frac{3a}{2}$$

2.) Integral einer zweidimensionalen Oberfläche  $O$  über Bereich  $B$

$$O = \iint_B \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, d(x,y) \quad \text{hier ist die Halbkugel} \quad \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}$$

Bei Kreis um Ursprung mit Radius  $a$  und  $f(x,y) = \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}$

a) Berechnen der partiellen Ableitungen:

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}) = \frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}) = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

$$\begin{aligned} b) \quad O &= \iint_B \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}}\right)^2 + \left(-\frac{y}{\sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}}\right)^2} \, d(x,y) \\ &= \iint_B \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{a^2 - (x^2 + y^2)}} \, d(x,y) \end{aligned}$$

Vorbereitung für Koordinatentransformation

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$x = r \cdot \cos \varphi$$

$$y = r \cdot \sin \varphi$$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

$$\frac{d(x,y)}{d(r,\varphi)} = J = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \cdot \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r \cdot \cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad \left\{ \begin{aligned} \det(J) &= r \cdot \cos^2(\varphi) + r \sin^2(\varphi) \\ &= r \end{aligned} \right.$$



$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \int_0^a \sqrt{1 + \frac{r^2}{a^2 - r^2}} \cdot \left| \frac{d(x,y)}{d(r,\varphi)} \right| dr d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^a \sqrt{1 + \frac{r^2}{a^2 - r^2}} \cdot r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^a \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - r^2}} \cdot r dr d\varphi$$

$$\left| \begin{array}{l} u = a^2 - r^2 \\ \frac{du}{dr} = -2r \\ du = -2r dr \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} r=a \rightarrow u=0 \\ r=0 \rightarrow u=a^2 \end{array}$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{a^2}^0 \sqrt{\frac{a^2}{u}} \cdot (-2r dr) d\varphi = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{a^2}^0 \sqrt{\frac{a^2}{u}} du d\varphi$$

$$= - \int_0^{2\pi} \left[ a \frac{1}{\sqrt{u}} \right]_{u=a^2}^{u=0} d\varphi = - \int_0^{2\pi} a \left[ \sqrt{u} \right]_{u=a^2}^{u=0} d\varphi$$

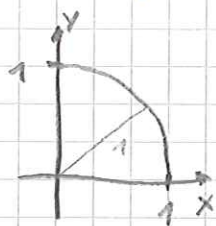
$$= - \int_0^{2\pi} a(0 - \sqrt{a^2}) d\varphi = - \int_0^{2\pi} -a^2 d\varphi = \left[ a^2 \varphi \right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = a^2 \cdot 2\pi$$

c) Kugeloberfläche:  $A_0 = 4\pi r^2$

$$\Rightarrow \text{hier: } \frac{1}{2} A_0 = 2\pi r^2 = 2\pi a^2 \quad \checkmark$$



3.) Integral über Kurve C durch parametrisieren



$$\begin{aligned} x(t) &= \cos(t) \\ y(t) &= \sin(t) \end{aligned} \Rightarrow \int_C f(x,y) dx = \int_{t_A}^{t_B} f(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} dt$$

"Substitution"

ganz gesucht  $\Rightarrow$  Kurvenintegral über Viertelkreis ( $t=0 \dots \frac{\pi}{2}$ )

$$\int_C (x+y^2) dx \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t) + \sin^2(t)) (-\sin(t)) dt$$

~~$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [-\sin(t) \cos(t) - \sin^3(t)] dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\sin(t) \cos(t) dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\sin^3(t) dt$$~~

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t) + 1 - \cos^2(t)) (-\sin(t)) dt$$

$$\left| \begin{array}{l} u = \cos(t) \\ \frac{du}{dt} = -\sin(t) \Rightarrow -\sin(t) dt = du \end{array} \right.$$

$$= \int_1^0 (u + 1 - u^2) du = \left[ \frac{1}{2} u^2 + u - \frac{1}{3} u^3 \right]_1^0 = 0 - \left( \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{3} \right) = -\frac{7}{6}$$

