FU Berlin: WiSe 2019/20 (Mathematik 2, Weber)

Übungszettel Nr. 2, Abgabe 29.10.2019 um 8:00 Uhr

Lernziele: Skalarprodukt in allgemeinen Vektorräumen; Kreuzprodukt (Vektorprodukt) und Spatprodukt in 3 Dimensionen

---

Aufgabe 1: (Skalarprodukt und Längen-, Winkelrechnung) Gegeben seien die folgenden dreidimensionalen reellen Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie jeweils die (euklidische) Länge dieser drei Vektoren mit Hilfe des Skalarproduktes und der Formel $\|a\| = \sqrt{\langle a, a\rangle}$.

b) Berechnen Sie den Winkel zwischen a und b, zwischen b und c, sowie zwischen a und c. Benutzen Sie wiederum das Skalarprodukt und die Formel

$$\cos(\varphi_{ab}) = \frac{\langle a, b\rangle}{\|a\| \cdot \|b\|}.$$

Aufgabe 2: (Skalarprodukt von reellwertigen Funktionen) Auf dem ersten Übungszettel haben Sie erfahren, dass auch (stetige) reellwertige Funktionen $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ einen Vektorraum über $\mathbb{R}$ bilden. In solchen Vektorräumen kann man ein Skalarprodukt definieren, dass den entsprechenden algebraischen Eigenschaften genügt. So ist z.B. das Skalarprodukt zwischen zwei (geeigneten, reellen) Funktionen f, g definiert als der Wert des bestimmten Integrals:

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx.$$

a) Sie haben in Aufgabe 1 gelernt, dass zwei Vektoren, die das Skalarprodukt Null haben, senkrecht zueinander stehen. Zeigen Sie, dass die Polynome

$$f(x) = 1, \qquad g(x) = \sqrt{3}(2x - 1), \qquad h(x) = \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1)$$

im Sinne des obigen Skalarproduktes $\langle \cdot, \cdot \rangle$ jeweils senkrecht zueinander stehen.

b) Die Länge eines Vektors f lässt sich mit Hilfe des Skalarproduktes definieren: $\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$. Welche Länge haben die Polynome aus Aufgabenteil a)? Erklären Sie in diesem Sinne den Begriff "Orthonormalsystem".

Aufgabe 3: (Kreuzprodukt, Plückerform von Geraden) Bestimmen Sie alle reellwertigen Vektoren der Form

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

für die gilt:

$$x \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

a) Stellen Sie die Lösungsmenge in der Form $x = a + \lambda b$ dar, wobei a, b von Ihnen zu bestimmende dreidimensionale Vektoren sind und λ eine frei wählbare reelle Zahl.

b) Machen Sie sich geometrisch (anhand der geometrischen Bedeutung des Kreuzproduktes) klar, dass die Lösungsmenge der obigen Aufgabe eine Gerade ergeben muss. Diese Darstellung von Geraden heißt auch Plückerform.

Die Aufgabe ließ sich nur lösen, weil $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ senkrecht zueinander stehen.

Aufgabe 4: (Volumen eines Spats, Spatprodukt)

a) Berechnen Sie das Volumen des Spates, der von den folgenden drei Vektoren aufgespannt wird:

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Ersetzen Sie den Vektor a durch einen Vektor a', indem Sie ein beliebiges Vielfaches von den Vektoren b und c hinzuaddieren. Also: für von Ihnen zu wählende reelle Zahlen λ_1, λ_2 setzen Sie $a' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie erneut das Spatvolumen von a', b und c. Was fällt auf? Es fällt recht schwer hinter dieser Konstruktion, das geometrische Prinzip von Cavalieri zu entdecken, aber das ist genau der Fall.

Viel Erfolg!