

Übungszettel Nr. 4, Abgabe 12.11.2019 um 8:00 Uhr

Lernziele: Bild und Kern einer Matrix; Allgemeine Lösung linearer Gleichungssysteme; Ausgleichsrechnung

Aufgabe 1: (Bild und Kern einer Matrix)

Bestimmen Sie mit Hilfe des "Bild-Kern-Algorithmus" (eine Basis aus \mathbb{R}^3 für) das Bild und (für) den Kern der folgenden quadratischen Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2: (Lineares Gleichungssystem)

Betrachten Sie die Matrix A aus Aufgabe 1.

a) Gibt es eine Lösung für das folgende Gleichungssystem?

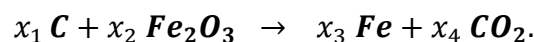
$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Geben Sie alle Lösungen des folgenden Gleichungssystems an!

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3: (Bestimmung stöchiometrischer Koeffizienten)

Für die folgende chemische Reaktion bestimmen Sie mögliche, ganzzahlige stöchiometrische Koeffizienten x_1, x_2, x_3 und x_4 :



Stellen Sie hierzu ein geeignetes lineares Gleichungssystem (drei Gleichungen und vier Unbekannte) auf und lösen Sie dieses.

Aufgabe 4: (Ausgleichsrechnung)

Hat man ein überbestimmtes Gleichungssystem (mehr Gleichungen als Unbekannte), dann hat dieses in praktischen Anwendungen (Messungen im Labor durchführen und eine Messkurve "hinein legen") häufig keine Lösung. Dennoch sucht

man eine Näherungslösung zu diesem System. Ein Beispiel: Man misst (fehlerbehaftet) die Höhe eines Balles zu verschiedenen Zeitpunkten

Zeitpunkt	1s	2s	3s	4s
Höhe	7m	8m	7m	3m

Man weiß (aus der Physik): Eigentlich sollte sich eine Parabel ergeben, wenn man die Zeit gegen die Höhe des Balls aufträgt. Also mit unbekannt reellen Zahlen $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ müsste gelten:

$$x_1 + x_2 * 1 + x_3 * 1^2 = 7,$$

$$x_1 + x_2 * 2 + x_3 * 2^2 = 8,$$

$$x_1 + x_2 * 3 + x_3 * 3^2 = 7,$$

$$x_1 + x_2 * 4 + x_3 * 4^2 = 3.$$

Oder in Matrixschreibweise geschrieben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1^2 \\ 1 & 2 & 2^2 \\ 1 & 3 & 3^2 \\ 1 & 4 & 4^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Dieses Gleichungssystem $Ax = b$ ist nicht lösbar. Um dennoch für ein solches Gleichungssystem eine Näherungslösung zu finden, löst man stattdessen das quadratische Gleichungssystem: $A^T Ax = A^T b$ (Normalengleichung).

a) Lösen Sie die Normalengleichung. Sie erhalten als Lösung die Parameter für die "Ausgleichsparabel".

b) Zeichnen Sie die Messpunkte und die "Ausgleichsparabel" in einen Graph.

Viel Erfolg!