FU Berlin: WiSe 2019/20 (Mathematik 2, Weber)

Übungszettel Nr. 5, Abgabe 19.11.2019 um 8:00 Uhr

Lernziele: Lineare Abbildungen als "Matrix-Vektor-Multiplikation"; Orthonormalsysteme und Projektion

---

Auf diesem Aufgabenblatt stehen viele Erklärungen. Die beschriebenen Methoden sollten Sie sich gut merken! Es geht um die Aussage, dass man jede lineare Abbildung zwischen (endlich-dimensionalen) Vektorräumen als Matrix-Vektor-Multiplikation schreiben kann... eine wichtige Rolle spielen dabei Orthonormalsysteme (ONS).

Aufgabe 1: (Projektion auf ein Orthonormalsystem (ONS))

Um eine lineare Abbildung letztendlich als Matrix-Vektor-Multiplikation schreiben zu können, muss man zunächst den Vektor in Form eines n-Tupels ausdrücken.

Das geht so: Wir wollen nun einen Vektor f als Linearkombination von orthonormalen Vektoren $v_1, \dots, v_n$ darstellen, also $f = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$. Diese Linearfaktoren bilden dann die Komponenten des n-Tupels. Wir schreiben

$$f = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Wie finden wir aber ganz konkret diese Linearfaktoren? Um eine solche Transformation durchführen zu können, eignen sich besonders gut (vollständige) Vektorräume mit Skalarprodukt - also Hilberträume. Nehmen wir z.B. die reellwertigen Polynome bis zum Grad 2 als Beispiel für $\mathbb{R}$-Vektoren. Die Polynome bilden einen solchen Hilbertraum. Das entsprechende Skalarprodukt haben wir ja schon auf dem zweiten Übungszettel in Aufgabe 2 kennen gelernt. Probieren wir aus, was das Skalarprodukt von f mit dem ersten Vektor eines ONS ergibt:

$$\langle v_1 | f \rangle = \langle v_1 \mid \underbrace{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n}_{=f} \rangle = \lambda_1 \langle v_1 | v_1 \rangle + \cdots + \lambda_n \langle v_1 | v_n \rangle = \lambda_1.$$

Aufgrund der Orthonormalität sind fast alle Skalarprodukte Null und nur $\langle v_1 | v_1 \rangle = 1$. Daher ist $\langle v_1 | f \rangle = \lambda_1$. Das ist also das "Rezept", wie man die Komponenten dieses n-Tupels bekommt, wenn man die orthonormalen Basisvektoren $v_1, \dots, v_n$ gegeben hat.

In unserem Polynombeispiel ist das ONS aus Zettel 2, Aufgabe 2 gegeben als $v_1 = 1,\ v_2 = \sqrt{3}(2x-1),\ v_3 = \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1)$. Rechnen Sie also die drei Komponenten des Vektors für $f = x^2$ aus und schreiben Sie f als 3-Tupel.

Aufgabe 2: (Lineare Abbildung als Matrix-Vektor-Multiplikation)

Jetzt gehen wir einen Schritt weiter. Einen solchen Vektor wollen wir einer linearen Abbildung unterziehen. Ein Beispiel für eine lineare Abbildung, die vom Vektorraum der Polynome (bis zum Grad zwei) wieder in diesen abbildet, ist die Differentiation (Ableitung). Hat man das Polynom gemäß Aufgabe 1 also als 3-Tupel geschrieben, dann muss es jetzt eine 3x3-Matrix M geben, die dieser Abbildung entspricht. Wie rechnet man diese Matrix aus? Das geht auch wieder über den Skalarprodukt-Trick. Zunächst rechnet man (die lineare Abbildung also) die Ableitungen der Basisvektoren aus, also v_1', v_2', v_3'. Jetzt sind die Matrixelemente M_{ij} (i-te Zeile, j-te Spalte) jeweils gegeben durch das Skalarprodukt $M_{ij} = \langle v_i | v_j' \rangle$.

a) Rechnen Sie diese Matrix für das Orthonormalsystem aus Aufgabe 1 aus. Benutzen Sie am besten einen Taschenrechner, der Integrale rechnen kann!

b) Wie lautet also die Ableitung von $f = x^2$ als 3-Tupel geschrieben? (f hatten Sie ja in Aufgabe 1 schon in ein 3-Tupel verwandelt. Rechnen Sie dessen Ableitung mit Hilfe einer Matrix-Vektor-Multiplikation aus)

Aufbage 3: (Galerkin-Projektion)

In Aufgabe 2 hatten wir ein Differential als Beispiel für eine lineare Abbildung gerechnet. Nun wollen wir das unbestimmte Integral (Integrationskonstante soll 0 sein) als lineare Abbildung wählen. Nehmen wir wieder die Menge der Polynome bis zum Grad 2. Leider führt dieses Mal die lineare Abbildung aus dem Raum raus. Das Integral von einem Polynom zweiten Grades ist ein Polynom dritten Grades.

a) Bestimmen Sie dennoch die 3x3-Matrix wie in Aufgabe 2, nämlich $M_{ij} = \langle v_i | \int v_j \rangle$, wobei $\int v_j$ das unbestimmte Integral von v_j mit Integrationskonstante Null ist.

b) Was wäre demnach das Integral von $f = x^2$ (Galerkin-projiziert auf den Raum der Polynome bis zum Grad 2)? Nutzen Sie dazu die Matrix-Vektor-Multiplikation und rechnen Sie das entstehende 3-Tupel in ein Polynom $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$ um!

Aufbage 4: (Gram-Schmidt-Verfahren)

Um also die Komponenten des n-Tupels auszurechnen, das einen Vektor f darstellen soll, benötigen wir also günstigerweise ein Orthonormalsystem von Basisvektoren. Lesen Sie in Wikipedia nach, wie das Gram-Schmidtsche Verfahren aus einer Menge von nicht-orthogonalen Vektoren ein Orthonormalsystem macht. Dieses Verfahren benötigt Skalarprodukte und Normen (Längen von Vektoren rechnen können). Nehmen Sie also als Basisvektoren die Funktionen

$$v_1 = 1, \qquad v_2 = \mathrm{x}, \qquad v_3 = \mathrm{x}^2$$

und orthonormalisieren Sie mit Hilfe des Gram-Schmidtschen Verfahrens gemäß dem Skalarprodukt aus den obigen Aufgaben!