FU Berlin: WiSe 2019/20 (Mathematik 2, Weber)

Übungszettel Nr. 6, Abgabe 26.11.2019 um 8:00 Uhr

Lernziele: Berechnung von Determinanten, Volumenberechnung in hohen Dimensionen, Bedeutung von "det(A)=0"

Aufgabe 1: (Determinante durch Spaltenumformung, Volumentreue Abbildung)

Bringen Sie mit Hilfe von Spaltenumformungen (wie im Bild-Kern-Algorithmus) die folgende Matrix auf eine untere Dreiecksform:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Die Determinante dieser Matrix erhalten Sie nun, indem Sie in der umgeformten Matrix die Diagonalelemente "auf"multiplizieren. Welchen Wert hat also die Determinante?

b) Ist die Matrix A eine orthogonale Matrix? Stellt sie also eine winkel- und längentreue Abbildung dar?

c) Erläutern Sie, warum die Matrix A eine volumentreue Abbildung darstellt. Benutzen Sie dazu die Relation $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Aufgabe 2: (Bedeutung von "det(A)=0")

Nehmen wir an, eine quadratische Matrix A habe die Determinante 0. Welche der folgenden Aussagen trifft dann zu bzw. nicht zu? Finden Sie jeweils Begründungen für Ihre Ansicht!

a) Der Kern der Matrix A enthält einen Vektor v, der nicht der Nullvektor ist. (Mathematisch gesprochen: Die Matrix A hat einen nicht-trivialen Kern.)

b) Die Spalten von A sind linear abhängig.

c) Die Matrix A besitzt eine inverse Matrix A^{-1}.

d) Ein lineares Gleichungssystem der Form $Ax = b$ ist eindeutig lösbar.

Tipp: Nutzen Sie Mathematik-Literatur, um die Fragen zu beantworten. Sie können sich bei der Lösung der Aufgabe auch konkret an der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

orientieren. Wenden Sie zunächst den Bild-Kern-Algorithmus an und machen Sie sich klar, dass die Matrix einen "nicht-trivialen" Kern besitzt... was bedeutet das für die Eindeutigkeit der Lösung von Gleichungen des Typs $Ax = b$?

Aufbage 3: (Determinante berechnen nach Sarrus und Laplace)

a) Lesen Sie im Netz nach, wie die Regel von Sarrus und wie der Laplace'sche Entwicklungssatz lauten und rechnen Sie mit Hilfe dieser beiden Methoden folgende Determinante aus:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix}.$$

b) Für welche Werte von λ ist die Determinante 0? Tipp: Eine Lösung ist $\lambda = -1$. Erinnern Sie sich bei der Nullstellenfindung von Polynomen an die Polynomdivision oder an das Horner-Schema (und natürlich an die pq-Formel)!

Aufbage 4: (Anwendung: Volumen eines 4D-Parallelepipeds)

Berechnen Sie das Volumen des Parallelepipeds, das von den folgenden vier Vektoren aufgespannt wird:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -k \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

wobei k eine positive reelle Zahl ist.

Viel Erfolg!