Aufgabe 1

a)

$$\begin{array}{c}\quad -2 \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ \quad +1\end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bild-Kern-Algorithmus

$$\underset{AR}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}} \quad \underset{R}{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

R-Matrix wird nicht benötigt!

Determinante entspricht dem Produkt der Diagonalelemente, also $\det(A) = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

b) Die Matrix A ist nicht orthogonal und stellt <u>daher</u> keine winkel- und längentreue Abbildung dar.

c) Betrachtet man A als eine lineare Abbildung, die ein Parallelepiped B auf AB abbildet, so ändert sich das Volumen dieses Epipeds nicht, da $\det(AB) = \underbrace{\det(A)}_{=1} \cdot \det(B) = \det(B)$

Aufgabe 2

a) Ja, $\det(A)=0$ bedeutet, dass im Bild-Kern-Algorithmus in AR eine Nullspalte steht, die in der Matrix R zu einem Nicht-Null-Kern führt.

b) Ja, der nicht-triviale Vektor im Kern von A zeigt ja an, wie man die Spalten von A linear kombinieren muss, um den Nullvektor zu erzeugen.

d/ c) Nein, nicht-trivialer Kern $\Rightarrow$ nicht eindeutige Lösung eines LGS $\Rightarrow$ nicht-invertierbare Matrix A

Aufgabe 3

a) Sarrus:
$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \\ 0 & 3 \end{matrix}$$

$$\det(A) = (2-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) - 3\cdot 2\cdot(2-\lambda)$$

Laplace nach erster Spalte

$$\det(A) = 2-\lambda \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\Big((2-\lambda)(1-\lambda) - 3\cdot 2\Big)$$

b) Der Laplace-Entwicklungssatz zeigt, dass $\lambda_2 = 2$ eine Nullstelle ist. $(2-\lambda)\cdot|\square| = 0$

Weitere Nullstellen sind also alle diejenige, für die $\underbrace{(2-\lambda)(1-\lambda)-3\cdot 2}_{=\square} = 0$ gilt.

Also

$$2 - 3\lambda + \lambda^2 - 6 = 0$$

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

$$\lambda_{1,3} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{16}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}$$

$\lambda_1 = -1$

$\lambda_3 = 4$

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{\text{Nullstellen}}:\ \lambda_1 &= -1 \\ \lambda_2 &= 2 \\ \lambda_3 &= 4 \end{aligned}}$$

<u>Aufgabe 4</u>: Entwicklung nach Laplace (letzte Spalte)

$$\det\begin{pmatrix} \overset{+}{1} & \overset{-}{-k} & \overset{+}{0} & \overset{-}{0} \\ 0 & 1 & 0 & 1^{+} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = +1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -k & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Sarrus} \\ \text{(es bleibt nur} \\ \text{1 Nicht-Null-Term)}}}{=} -(1\cdot 1\cdot(-k)) = k$$