Mathematik-I

Funktionentheorie

Motivation

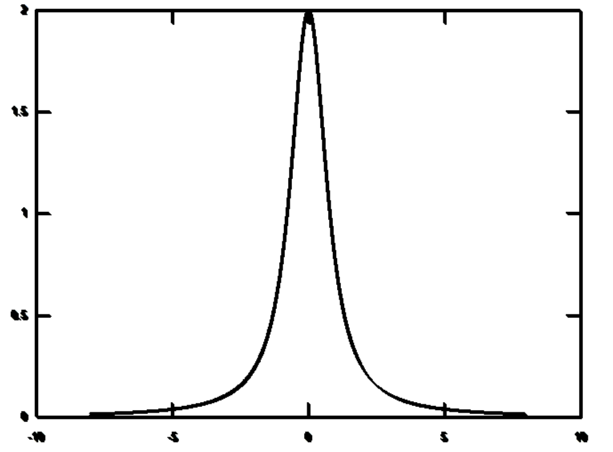
Versuchen Sie folgende unbestimmte Integrale auszurechnen (Stammfunktionen finden):

$$\int \frac{\cos(x)}{x}\,dx \qquad \int \frac{\sin(x)}{x}\,dx$$

Die für die Spektroskopie wichtige sinc-Funktion

Versuchen Sie den Wert des folgenden uneigentlichen Integrals zu berechnen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{x}^2 + 2}{x^4 + 2x^2 + 1}\,dx$$



Von der Potenzreihe aus denken…

<u>Bisher haben wir so gedacht</u>: Wir haben z.B. die Funktion sin(x). Diese hat bestimmte Eigenschaften (z.B. Additionstheorem, Ableitung…). Den sin(x) wollen wir jetzt berechenbar machen. Wir rechnen also die Taylorreihe aus und erhalten $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$… Diese Reihe konvergiert für jede Zahl x. Also kann man den Sinus immer so ausrechnen, und zwar auch für komplexe Zahlen.

<u>Jetzt wollen wir so denken</u>: Wir haben eine Potenzreihe $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$… Diese Reihe konvergiert für alle komplexe Zahlen x. Also stellt diese Potenzreihe eine Funktion für alle komplexe Zahlen dar. Jetzt brauchen wir noch einen Namen für diese Funktion… Nennen wir sie mal sin(x). Was sind die Eigenschaften dieser neuen Funktion (wenn man sie z.B. zu anderen Potenzreihen addiert oder wenn man sie ableiten will)? Dazu muss man nur die Rechengesetze für Polynome kennen, die sind einfach…

Laurent: Auch negative Exponenten zulassen

Manchmal ist es gar nicht leicht, eine Taylorreihen-Entwicklung durchzuführen. Z.B. an welcher Stelle sollte man die Funktion $\frac{\cos(x)}{x}$ entwickeln? Die Wahl $x_0 = 0$ für die Entwicklungsstelle der Taylorreihe macht Probleme, da $\frac{\cos(x)}{x}$ an dieser Stelle einen Pol hat und daher nicht definiert ist. Dennoch würde man ja gerne schreiben: $\frac{\cos(x)}{x} = \frac{1}{x} \cdot \cos(x) = \frac{1}{x} \cdot (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots)$ und damit $\frac{\cos(x)}{x} = x^{-1} - \frac{x}{2!} + \frac{x^3}{4!} - \frac{x^5}{6!} + \cdots$ Eine solche Reihe, bei der auch negative Exponenten vorkommen dürfen, heißt Laurentreihe (Herrn Pierre Alphonse Laurent französisch aussprechen! Dann freut er sich...).

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \, (x - x_0)^n \,,$$

wobei wir hier aber nur die Laurentreihen betrachten wollen, die endlich viele Summanden mit negativem Exponenten haben, bei denen der Laufindex n also von –N bis +unendlich geht.

Gliedweises Integrieren, Differenzieren

Wenn man von der Potenzreihe/Laurentreihe aus denkt, dann sind Integrieren und Differenzieren der Funktionen ganz einfach. Man muss lediglich die einzelnen Summanden der Reihe integrieren oder ableiten:

$$\int \cos(x)\,dx = \int \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \right) dx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + c = \sin(x) + c$$

$\cdot \frac{1}{x}$

oder

$$\int \frac{\cos(x)}{x}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{2!} + \frac{x^3}{4!} - \frac{x^5}{6!} + \cdots \right) dx = \ln(x) - \frac{x^2}{2!\cdot 2} + \frac{x^4}{4!\cdot 4} - \frac{x^6}{6!\cdot 6} + \cdots + c = \mathrm{Ci}(x) + c$$

Dieser Reihe (inklusive dem Logarithmus) hat man den Namen Ci(x) gegeben. Eine neue Funktion.

Ausschnitt einer Laurentreihe

$$\ldots + a_{-3}(x - x_0)^{-3} + a_{-2}(x - x_0)^{-2} + a_{-1}(x - x_0)^{-1} + a_0 + a_1(x - x_0) \quad + a_2(x - x_0)^2 + \cdots$$

Das ist der Ausschnitt aus einer Laurentreihe. Wenn man so eine Reihe gliedweise integriert, dann enthält jeder Summand wieder eine Potenz $(x - x_0)^n$. Für diese Summanden (mit negativem n) ist x_0 dann wieder eine Definitionslücke. Nur aus dem Summand $a_{-1}(x - x_0)^{-1}$ wird beim Integrieren etwas anderes, nämlich $a_{-1} ln(x - x_0)$, wobei der komplexe Logarithmus für die gesamte negative reelle Achse nicht definiert ist.

Konvergenzradius bleibt gleich

Der Konvergenzradius einer Reihe wird über den Satz von Cauchy und Hadamard berechnet. Dazu muss man für die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ den Ausdruck $\sqrt[n]{|a_n|}$ untersuchen. Durch gliedweises Ableiten wird aus dieser Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\, a_n(x-x_0)^{n-1}. \qquad (*)$$

Es ist egal, ob man jetzt diese Reihe $(*)$ oder $\sum_{n=0}^{\infty} n\, a_n(x-x_0)^n$ untersucht. Letzterer Ausdruck ist ja nur dann endlich (also rechenbar), wenn $(*)$ endlich ist. Zur Untersuchung der Konvergenz muss man den Ausdruck $\sqrt[n]{n\,|a_n|} = \sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{|a_n|}$ untersuchen, der aber wegen der Konvergenz von $\sqrt[n]{n}$ gegen eins den gleichen Grenzwert (auch limes superior) hat wie $\sqrt[n]{|a_n|}$.

X

Komplexes Integral

Soweit also zu dem Problem, ein unbestimmtes Integral zu rechnen, wenn man die Laurentreihe aufschreiben kann. Jetzt kommen wir zu den bestimmten (bzw. uneigentlichen) Integralen. Eigentlich rechnen wir ja die ganze Zeit hier mir komplexen Zahlen. Also könnte man sich ein Integral

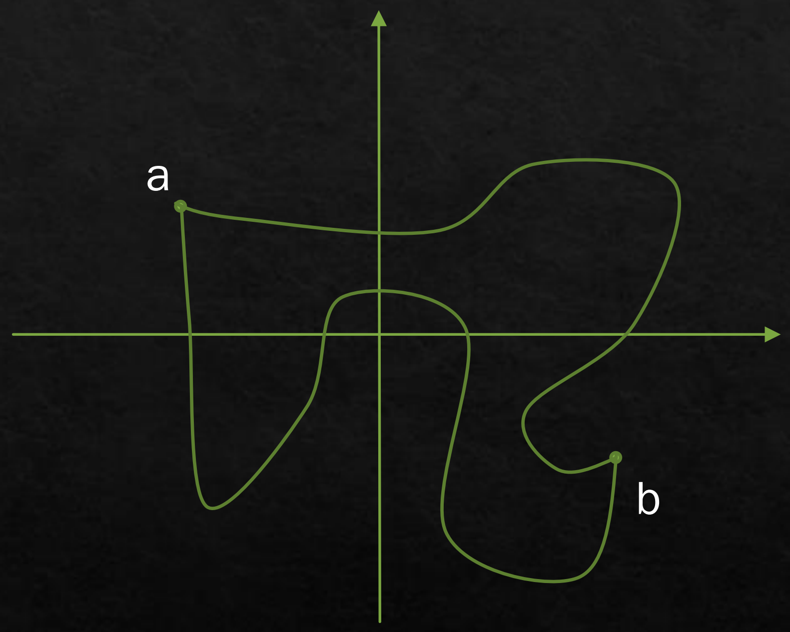
$$\int_a^b f(x)\,dx$$

auch mit einer komplexen Funktion f vorstellen? Dann wäre also auch x komplex. Dann wären dx infinitesimale komplexe „Intervalle". Und dann wäre das Produkt $f(x)\,dx$ eine Multiplikation komplexer Zahlen. Alles denkbar. Und x würde dabei in „Schritten" dx von a bis b gehen. Moment mal! Die komplexen Zahlen a und b würden doch dann irgendwo im 2D-Raum liegen. ...

Komplexes Wegintegral

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Ja, beim komplexen Wegintegral läuft man von einem Punkt a der Ebene zu einem Punkt b. Und unter bestimmten Umständen (lernen wir in Mathe-II) ist der Wert des Integrals unabhängig vom Weg gerade $F(b) - F(a)$. Läuft man also einmal im Kreis, dann ist der Wert des (Kreis)-Integrals Null.
$\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

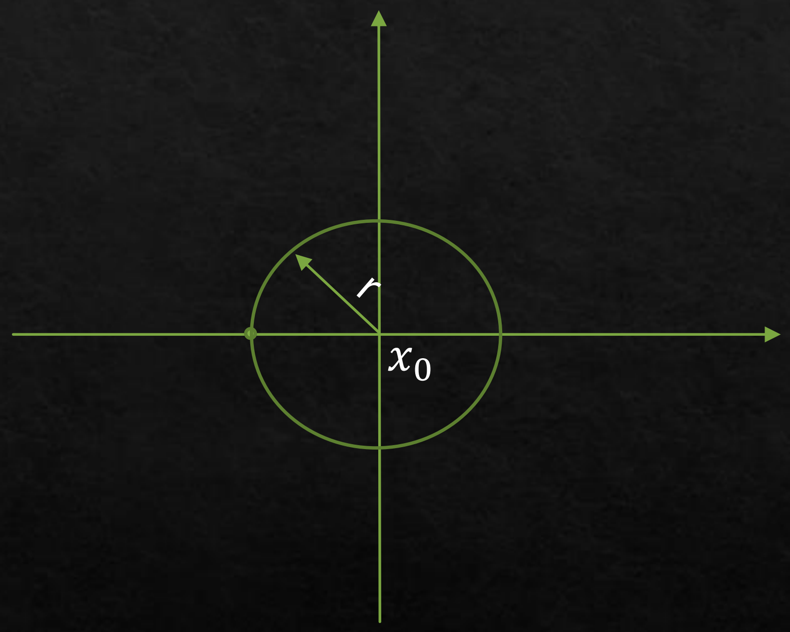


Komplexes Kreisintegral

Eine wichtige Ausnahme von dieser Wegunabhängigkeit ist das Integral

$$\int_{K_r(x_0)} \frac{1}{x - x_0} dx \,,$$

wobei $K_r(x_0)$ der Kreis um die Polstelle x_0 mit Radius r bedeutet. Entweder man rechnet den Wert dieses Integrals tatsächlich aus, oder man überlegt sich den Wert… Ich führe jetzt beide Rechenarten vor…

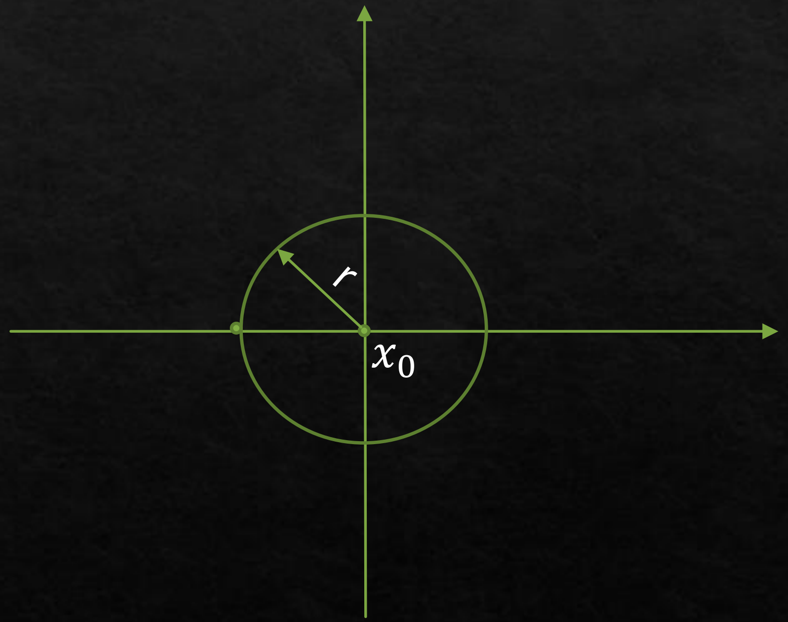


1) Ausrechnen: Substitution

Komplexe Wegintegrale rechnet man aus, indem man eine Substitution durchführt, so dass die Grenzen des Integrals reelle Zahlen sind. Den Kreis um die Polstelle x_0 mit Radius r kann man schreiben als

$$x(t) = x_0 + r\, e^{it},$$

wobei t von $-\pi$ bis π läuft.



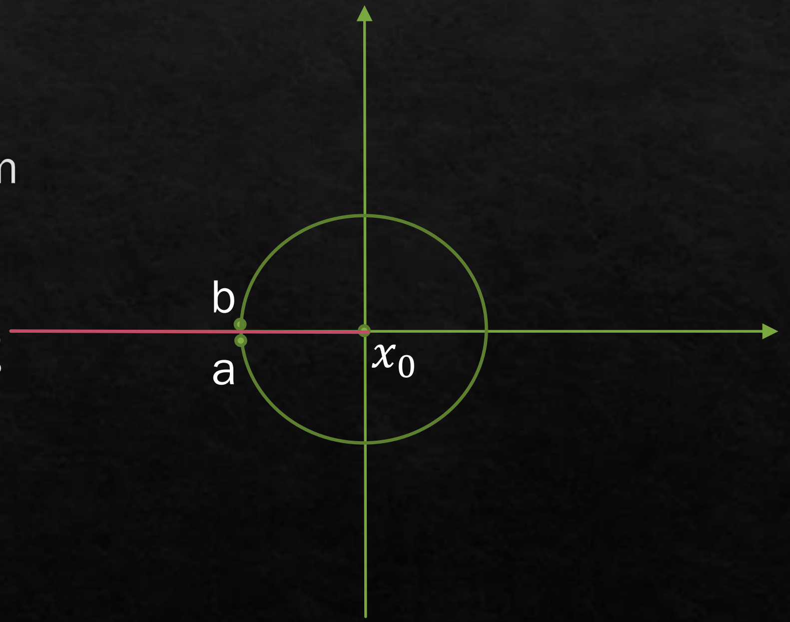
$$\int_{K_r(x_0)} \frac{1}{x - x_0} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{r\, e^{it}}\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{r\, e^{it}} \frac{dx}{dt} dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{ir\, e^{it}}{r\, e^{it}} dt$$

$$= i \int_{-\pi}^{\pi} dt = 2\pi i$$

2) Überlegen: ln(x) hat eine Sprungstelle

Eigentlich kann man den Wert des Kreisintegrals auch über die Stammfunktion ausrechnen $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$. Die Stammfunktion von $f(x) = \frac{1}{x-x_0}$ ist $F(x) = \ln(x - x_0) + \mathrm{c}$. Der natürliche Logarithmus berechnet sich im Komplexen als $\ln(|x - x_0|) + i\,\arg(x - x_0)$. Am Anfangspunkt a und am Endpunkt b des Kreises (eigentlich überall auf dem Kreis) ist $|x - x_0| = r$. Also fällt bei der Differenz $F(b) - F(a)$ der Logarithmusteil weg.

Aber am Endpunkt b ist das Argument von $\arg(x - x_0) = \pi$ und am Anfang a war es $-\pi$. Also bleibt in der Differenz $F(b) - F(a)$ der Wert $2\pi i$ stehen. Der natürliche Logarithmus hat auf der negativen reellen Achse eine Unstetigkeitsstelle (Sprungstelle von 2π).



Integralsatz von Cauchy

Wenn man eine Laurentreihe f(x) (mit nur endlich vielen negativen Exponenten) gliedweise integriert, um die Stammfunktion F(x) auszurechnen, dann macht einzig und allein der Term $a_{-1}(x - x_0)^{-1}$ Probleme, da bei Integration daraus der natürliche Logarithmus wird, der auf der negativen reellen Achse eine Sprungstelle hat. Wenn man dann das Kreisintegral von f(x) um den Entwicklungspunkt x_0 der Laurentreihe ausrechnet, wird dieses deshalb nicht Null, sondern ist wegen der Sprungstelle

$$\int_{K_r(x_0)} f(x)\, dx = a_{-1} \cdot 2\pi i.$$

Da also bei der Reihenentwicklung der Vorfaktor vor dem $(x - x_0)^{-1}$ so eine große Bedeutung für das Kreisintegral hat, hat er einen eigenen Namen bekommen. Man nennt bei der Laurentreihe einer Funktion um den Entwicklungspunkt x_0 den Vorfaktor a_{-1} auch das „Residuum von f am Entwicklungspunkt x_0“: $a_{-1} = res_{x_0} f$.

Entwicklungspunkt beachten

Angenommen wir wollten das folgende Kreisintegral ausrechnen:

$$\int_{K_r(1)} \frac{\sin(x)}{(x-1)^3}\, dx\,,$$

Dann ist zunächst die Laurentreihe von $\frac{\sin(x)}{(x-1)^3}$ zu bestimmen, und zwar wegen $K_r(1)$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ (das macht es kompliziert). Und von dieser Reihe interessiert uns nur das Residuum $res_1 \frac{\sin(x)}{(x-1)^3}$, also der Vorfaktor vor dem Ausdruck $(x-1)^{-1}$. Wenn wir den kennen, dann wissen wir ja

$$\int_{K_r(1)} \frac{\sin(x)}{(x-1)^3}\, dx = 2\pi i \cdot res_1 \frac{\sin(x)}{(x-1)^3}.$$

Residuum berechnen

Der Trick bei der Berechnung des Residuums ist es, die Polstelle am Entwicklungspunkt x_0 zu beseitigen. Also anstatt das Residuum von $f(x)$ (von z.B. $\frac{\sin(x)}{(x-1)^3}$ an der Stelle $x_0 = 1$) auszurechnen, multipliziert man den Ausdruck mit einer passenden Potenz $(x - x_0)^m$, so dass der Pol verschwindet. Hier im Beispiel $\frac{\sin(x)}{(x-1)^3}$ eignet sich $m = 3$. Aus der Laurentreihe wird so eine ganz normale Potenzreihe von $f(x)(x - x_0)^m$. (Zu jedem Exponenten wird m addiert, so dass es keine negativen Exponenten mehr gibt)

Jetzt steht der gesuchte Koeffizient a_{-1} aber vor der Potenz $(x - x_0)^{m-1}$.

Und jetzt kommt der mathematische Gedanke: Die Potenzreihe von $f(x)(x - x_0)^m$, die wir so erzeugt haben, ist genau die Taylorreihe von $f(x)(x - x_0)^m$. Von dieser Funktion müssen wir jetzt den Koeffizienten der Taylorreihe vor dem Ausdruck $(x - x_0)^{m-1}$ ausrechnen.

Residuum berechnen

Insgesamt ergibt sich folgende Gleichung für das Residuum:

$$res_{x_0} f = \underbrace{\frac{1}{(m-1)!}}_{} \underbrace{\lim_{x \to x_0}}_{} \underbrace{\frac{d^{m-1}}{(dx)^{m-1}}}_{} \underbrace{(f(x) \cdot (x - x_0)^m)}_{}$$

1. Polstelle beseitigen

4. Dieser Faktor taucht auch bei der Taylorreihe auf.

3. In die Ableitung x_0 einsetzen. Etwas kompliziert hingeschrieben.

2. Ich brauche den (m-1)-ten Koeffizienten der Taylorreihe. Also (m-1)-mal ableiten.

Für das Beispiel

In unserem Beispiel war $f(x) = \frac{\sin(x)}{(x-1)^3}$. Zudem war $x_0 = 1$ und $m = 3$. Mit der Formel ergibt sich also

$$\underbrace{res_1\, f = \frac{1}{(3-1)!} \lim_{x\to 1} \frac{d^2}{(dx)^2}\left(\frac{\sin(x)}{(x-1)^3}\cdot(x-1)^3\right)}_{\text{Einsetzen in Formel}} = \underbrace{\frac{1}{2!} \lim_{x\to 1} \frac{d^2}{(dx)^2}\sin(x)}_{\text{Vereinfachen}} = \underbrace{\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}(-\sin(x)) = -\frac{\sin(1)}{2}}_{\text{Ableitung ausrechnen, 1 einsetzen}}$$

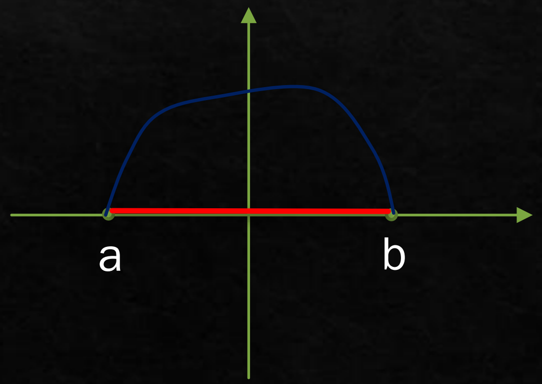
Und daher

$$\int_{K_r(1)} \frac{\sin(x)}{(x-1)^3}\, dx = 2\pi i \cdot res_1 \frac{\sin(x)}{(x-1)^3} = -\pi i \sin(1)$$

Idee: Komplexe Integrale

Keisintegrale schön und gut, aber meistens interessiert man sich doch für reelle Integrale, z.B. für $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{x}^2+2}{x^4+2x^2+1}\, dx$, was unsere Eingangsmotivation war.

Und jetzt kommt es: Manchmal ist es sinnvoll, sich auch reelle Integrale als komplexe Integrale vorzustellen. Wenn wir es so basteln können, dass der Integrand als komplexe Funktion gedacht, wegunabhängig integriert werden kann, dann könnte man ein reelles Integral (entlang des roten Pfades) auch durch ein komplexes Wegintegral z.B. über einen „Halbkreis“ (blaue Kurve) ersetzen.



Anstatt zur Berechnung des Integrals den Weg über die reelle Achse von a nach b zu gehen, könnte man auch einen Weg durch die komplexe Zahlenebene nehmen. (Auf den Wegen darf es keine Polstellen geben!)

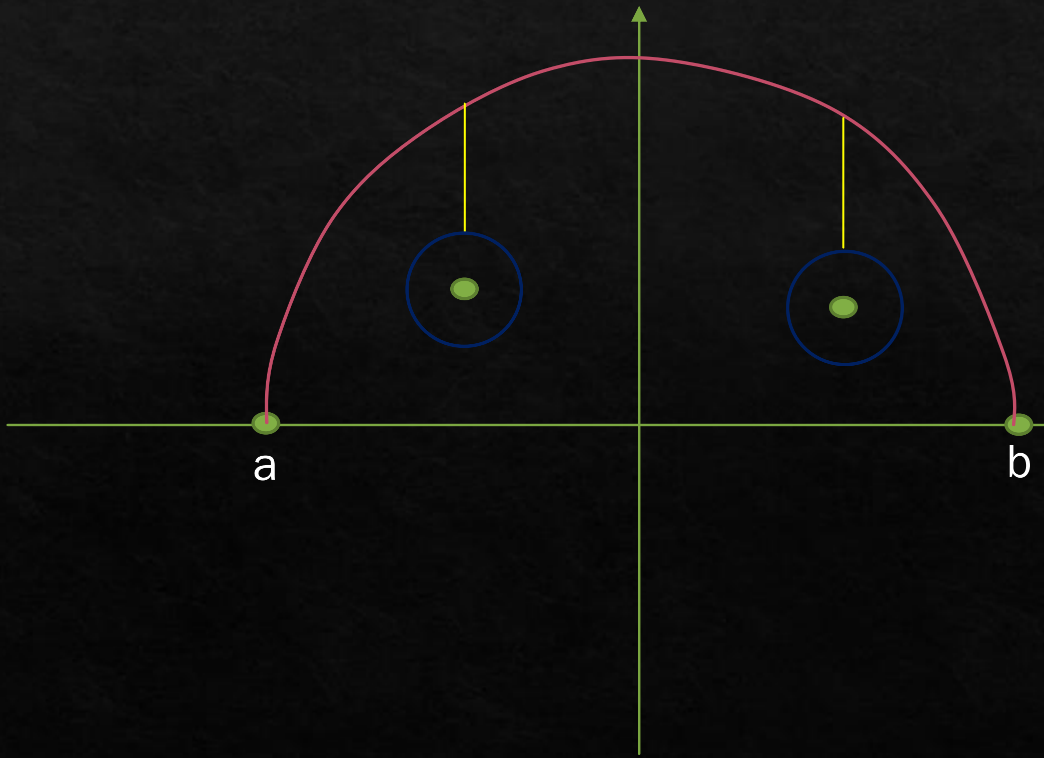
Idee: Polstellen „umschiffen“

Um die Wegunabhängigkeit des komplexen Integrals zu garantieren, müssen die Polstellen der Funktion eigentlich außerhalb von dem Halbkreis liegen. Befinden sich in der oberen komplexen Zahlenebene allerdings Polstellen der zu integrierenden Funktion (hier durch grüne Punkte dargestellt), dann „umschifft“ man diese bei der Integration auf folgende Weise:

1. Das Integral entlang des pinken Pfades entspricht nicht dem reellen Integral von a bis b. Denn es befinden sich Polstellen innerhalb des Halbkreises.

Idee: Polstellen „umschiffen“

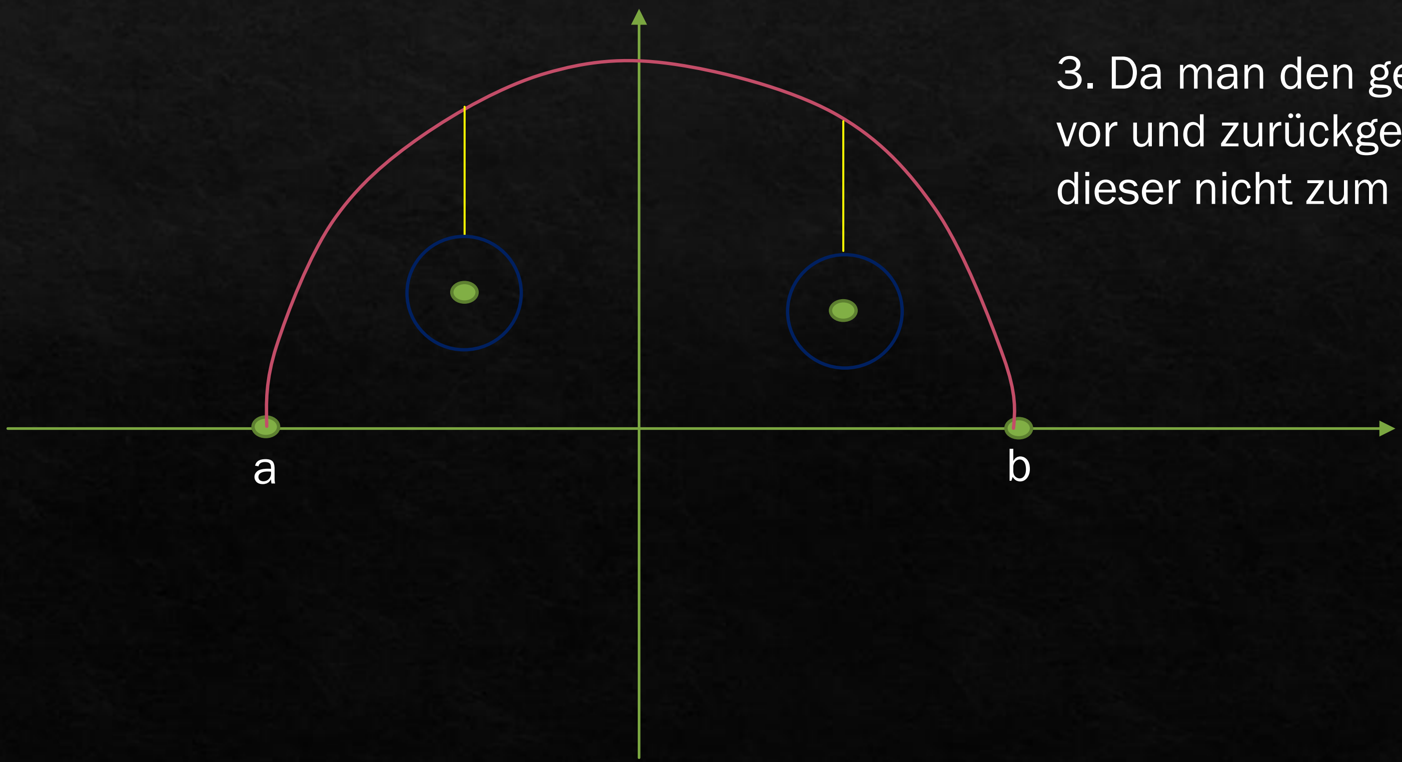
Um die Wegunabhängigkeit des komplexen Integrals zu garantieren, müssen die Polstellen der Funktion eigentlich außerhalb von dem Halbkreis liegen. Befinden sich in der oberen komplexen Zahlenebene allerdings Polstellen der zu integrierenden Funktion (hier durch grüne Punkte dargestellt), dann „umschifft“ man diese bei der Integration auf folgende Weise:



2. Um diese Polstellen zu „umschiffen“ geht man von a aus entlang der pinken Linie, verzweigt von dort in den gelben Weg, umkreist einmal die Polstelle (blau, entgegen dem Uhrzeigersinn) und kehrt auf dem gelben Weg wieder zur pinken Line zurück. Jetzt liegt die Polstelle „außen“ (sozusagen immer „linke Hand“, wenn man auf dem beschriebenen Weg läuft).

Idee: Polstellen „umschiffen“

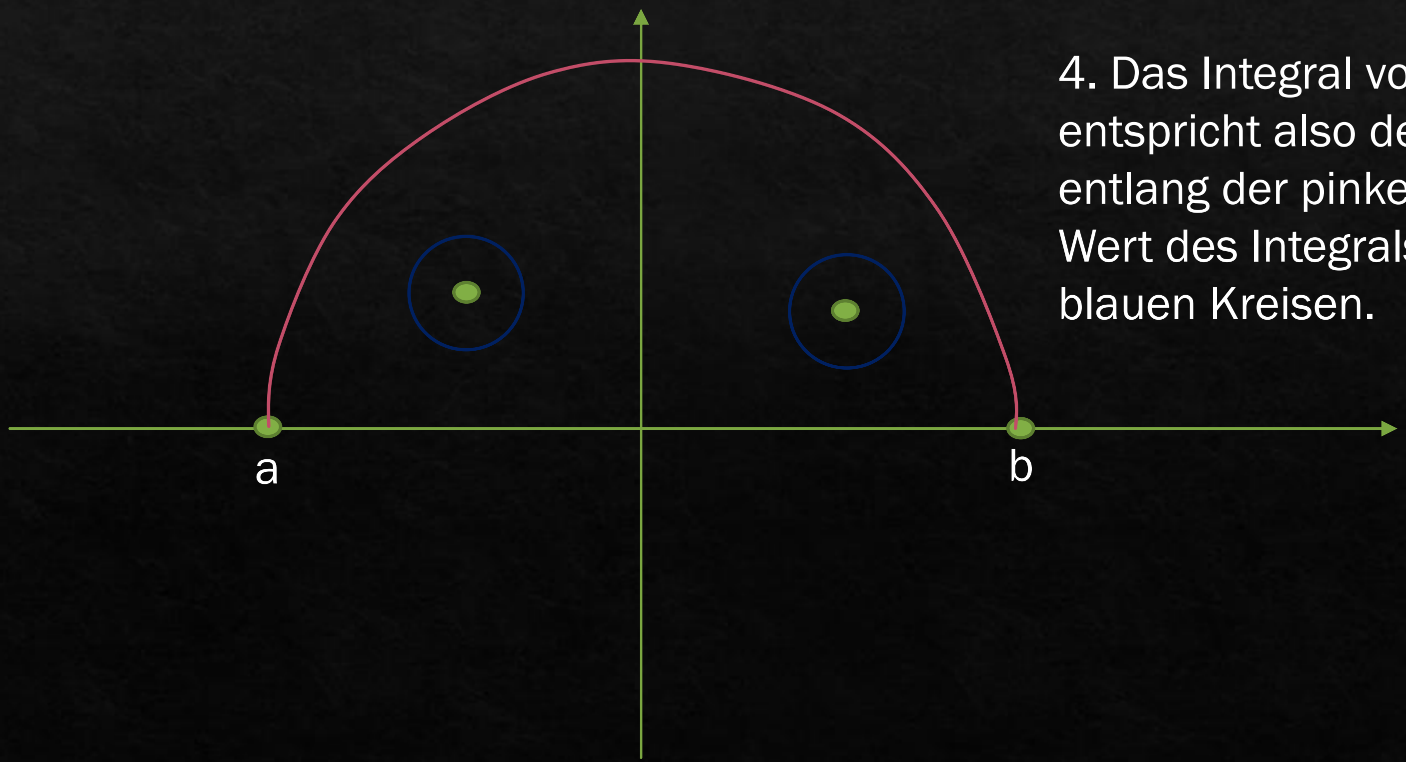
Um die Wegunabhängigkeit des komplexen Integrals zu garantieren, müssen die Polstellen der Funktion eigentlich außerhalb von dem Halbkreis liegen. Befinden sich in der oberen komplexen Zahlenebene allerdings Polstellen der zu integrierenden Funktion (hier durch grüne Punkte dargestellt), dann „umschifft“ man diese bei der Integration auf folgende Weise:



3. Da man den gelben Weg einmal vor und zurückgegangen ist, trägt dieser nicht zum Integralwert bei.

Idee: Polstellen „umschiffen“

Um die Wegunabhängigkeit des komplexen Integrals zu garantieren, müssen die Polstellen der Funktion eigentlich außerhalb von dem Halbkreis liegen. Befinden sich in der oberen komplexen Zahlenebene allerdings Polstellen der zu integrierenden Funktion (hier durch grüne Punkte dargestellt), dann „umschifft“ man diese bei der Integration auf folgende Weise:



4. Das Integral von a bis b entspricht also dem Integral entlang der pinken Linie. Plus dem Wert des Integrals auf den beiden blauen Kreisen.

Idee: Polstellen „umschiffen“

Um die Wegunabhängigkeit des komplexen Integrals zu garantieren, müssen die Polstellen der Funktion eigentlich außerhalb von dem Halbkreis liegen. Befinden sich in der oberen komplexen Zahlenebene allerdings Polstellen der zu integrierenden Funktion (hier durch grüne Punkte dargestellt), dann „umschifft“ man diese bei der Integration auf folgende Weise:

5. Auf den blauen Kreisen werden Kreisintegrale um eine Polstelle gerechnet. Sie haben also jeweils den Wert $2\pi i \; res_{x_0} f$, wobei x_0 die entsprechende Polstelle ist.

Idee: Uneigentliche Integrale

Wenn jetzt noch die Grenzen a und b gegen unendlich streben. Dann geht auch der pinke Weg immer mehr ins Unendliche. Bei manchen Funktionen ist das Integral über diesen (unendlich weit entfernten) pinken Weg dann Null. Nämlich dann wenn man Integrale wie $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+2}{x^4+2x^2+1}\,dx$ hat, bei denen der Grad des Polynoms im Nenner mindestens um zwei größer ist als der Grad des Zählerpolynoms.

Idee: Uneigentliche Integrale

Aus dieser Überlegung ergibt sich:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \sum_{x_0} res_{x_0}\, f,$$

wobei über alle Polstellen x_0 zu summieren ist, die in der oberen komplexen Halbebene liegen.

Beispielrechnung

Nehmen wir uns das einleitende Beispiel vor: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+2}{x^4+2x^2+1}\, dx$. Zunächst muss man das Nennerpolynom in seine Linearfaktoren zerlegen. Das können Sie machen, indem Sie z.B. $z = x^2$ setzen und die p-q-Formel verwenden. Es wird sich ergeben: $x^4 + 2x^2 + 1 = (x+i)^2(x-i)^2$. Die Nullstellen des Nenners sind also i und –i. Beide nicht reell. Gut. Also hat die Funktion keinen Pol auf der reellen Achse und das Zählerpolynom hat mindestens zwei Grade weniger als das Nennerpolynom. Also Residuenkalkül.

In der oberen komplexen Halbebene liegt nur die Polstelle i. Also müssen wir das Residuum von $\frac{x^2+2}{x^4+2x^2+1}$ an der Stelle $x_0 = i$ ausrechnen. Die Vielfachheit der Polstelle ist $m = 2$. Wir benutzen die Formel:

$$res_i \frac{x^2+2}{x^4+2x^2+1} = \frac{1}{1!} \lim_{x \to i} \frac{d}{dx} \frac{x^2+2}{(x+i)^2} = \lim_{x \to i} \frac{2ix^2 - 6x - 4i}{(x+i)^4} = \frac{-2i - 6i - 4i}{(2i)^4} = -\frac{3}{4} i$$

mit cymath ableiten

i einsetzen

Beispielrechnung

Schließlich rechnet man (durch Multiplikation mit $2\pi i$) für das Integral aus:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+2}{x^4+2x^2+1}\,dx = 2\pi i \;\; res_i \frac{x^2+2}{x^4+2x^2+1} = \frac{3}{2}\pi$$

Mit dem Residuenkalkül zu rechnen, bietet viele Stolperfallen und Möglichkeiten für falsche Ansätze (fehlende Überprüfung der Voraussetzungen). Sonst aber sind im Grunde die Ideen für dieses Kalkül immer gleich: Polstellen durch geeignete Wahl der Integrationswege „umschiffen" und bei der „Umkreisung" einer Polstelle die Unstetigkeit des Logarithmus ausnutzen.

Besonders, wenn Winkelfunktionen in dem Integranden auftauchen muss man aufpassen, dass die Winkelfunktionen Potenzreihen darstellen (also Polynome vom Grad „unendlich" sind). Hier muss man andere Umformungstricks verwenden. Schauen Sie sich dieses Video an. Der zweite und dritte Teil dieses Videos behandeln die komplizierteren Funktionen. Die wären aber dann 4. Semester Mathematik.

Anmerkung: Komplexe Funktionen 2D -> 2D

In vielen Anfängervorlesungen wird gesagt, dass komplexe Funktionen so etwas sind, wie 2-dimensionale reelle Funktionen. Also anstelle von f(z) schreibt man eine Funktion f(x,y), wobei z=x+iy sein soll. Das Ergebnis der Funktion ist wieder eine komplexe Zahl w, die man als w=u+iv schreibt.

Die Differenzierbarkeit von komplexen Funktionen wird dann nicht anhand von Laurentreihen diskutiert, sondern es wird gesagt, dass eine komplexe Funktion f(x,y)=u(x,y) + i v(x,y) genau dann auf einem Bereich D komplex differenzierbar ist, wenn dort für die partiellen Ableitungen gilt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Äquivalent kann man aber auch formulieren, dass eine Funktion genau dann komplex differenzierbar ist auf einem Bereich D, wenn sie innerhalb dieses Bereiches in eine Potenzreihe entwickelbar ist…