MODAL
Forschungscampus

1)1)

$$\det\begin{pmatrix} 5-\lambda & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 5-\lambda & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ -3 & 3 & 7 & 8-\lambda \end{pmatrix}$$

Laplace letzte Spalte

$$\overset{\downarrow}{=} (8-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix} 5-\lambda & 3 & 1 \\ 3 & 5-\lambda & -7 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

Laplace letzte Zeile

$$\overset{\downarrow}{=} (8-\lambda)(2-\lambda)\det\begin{pmatrix} 5-\lambda & 3 \\ 3 & 5-\lambda \end{pmatrix}$$

Sarrus

$$\overset{\downarrow}{=} (8-\lambda)(2-\lambda)\left((5-\lambda)^2-9\right)$$

$$= (8-\lambda)(2-\lambda)\left(\lambda^2-10\lambda+25-9\right)$$

$$= (8-\lambda)(2-\lambda)\left(\lambda^2-10\lambda+16\right)$$

1)2) $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 2$

$$\lambda_{3,4} = 5 \pm \sqrt{5^2-16} = 5\pm\sqrt{9} = 5\pm 3$$

pq-Formel
für $\lambda^2-10\lambda+16$

1)3) $\Rightarrow$ Eigenwerte $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 2$ mit alg. VF 2,
da das char. Polynom: $(\lambda-8)^2(\lambda-2)^2$.

1) 4)

$\lambda_1 = 8$

Bild-Kern-Alg. für $A - \lambda_1 I$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -3 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$+(1)$

$+(3)$

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|cccc} -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & * & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccccccc} & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \end{array} \end{array}$$

Eigenraum zu $\lambda_1 = 8$: $\operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

geo VF = 2

$\lambda_2 = 2$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 7 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

1. $-$ 2. $-$

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -7 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 6 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccccccc} & & & \uparrow & & & & \uparrow \end{array} \end{array}$$

Eigenraum zu $\lambda_2 = 2$

$\operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

geo VF = 2

MODAL
Forschungscampus

1.6. Nein, da für $\lambda_2 = 2$ geo VF und alg VF nicht übereinstimmen

1.7 $(\lambda-8)(\lambda-2)^2$

1.8 Die Determinante von A ist $8 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 2 = 256$

$256 = 4^4$, daher ist $\alpha = \frac{1}{4}$ zu wählen, da jede Spalte von αA um den Faktor $\frac{1}{4}$ „größer" als die Spalte von A ist, insgesamt also $\left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{256}$ die Determinante geändert wird

1.9. Nein die Spalten von αA sind nicht orthogonal zueinander $\Rightarrow$ αA ist nicht orthogonal $\Rightarrow$ Die Abbildung ist nicht längen- und winkeltreu

2.1. $e^{-i\alpha}z$ dreht die Zahlenebene um den Winkel $-\alpha$, also die Spiegelgerade auf die x-Achse.

$\overline{e^{-i\alpha}z}$ führt dann die Spiegelung an dieser x-Achse durch.

Durch $e^{i\alpha}\overline{e^{-i\alpha}z}$ wird die Zahlenebene zurück gedreht um den Winkel α.

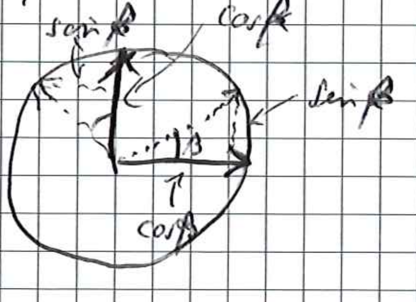
2.2. $e^{i\alpha}\overline{e^{-i\alpha}z} = e^{i\alpha}\overline{e^{-i\alpha}}\,\bar{z} = e^{i\alpha}e^{i\alpha}\bar{z}$

$= e^{i2\alpha}\bar{z}$

Dieses stellt die gewünschte Operation (Spiegelung an x, gefolgt von einer Drehung um 2α dar)

q.e.d.

2.3



Koordinaten des gedrehten x-Achsen Einheitsvektors.

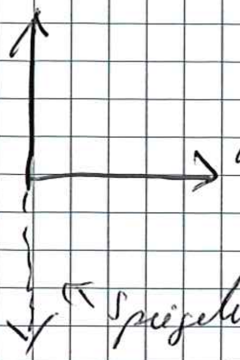
$$\begin{pmatrix} \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \end{pmatrix}$$

Koordinaten des gedrehten Y-Achsen Einheitsvektors

$$\begin{pmatrix} -\sin(\beta) \\ \cos(\beta) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow R_\beta = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

2.4.



bei Spiegelung bleibt dieser erhalten

Spiegelung an y-Achse von y-Einheitsvektor

$$\Rightarrow \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2.5. Reihenfolge beachten:

$$R_\beta \cdot S = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) \\ \sin(\beta) & -\cos(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

erst Spiegelung

dann Rotation

Nur noch Kern zu rechnen.

3)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\cdot 2$ $\qquad$ $\cdot 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\cdot 2$ $\qquad$ $\cdot 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\ker(A) = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Image(A) $= \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Spezielle Lösung: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

allgemeine Lösung: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

4.1 Nein!

Eine Orientierungsumkehrende Matrix B hätte mindestens einen negativen Eigenwert und einen normierten Eigenvektor v dazu, so das $v^T B v = \lambda \underbrace{v^T v}_{=1} < 0$

Das widerspricht dem Definition des Skalarproduktes.

4.2 Nein!

Bei einem nicht-trivialen Kern gibt es einen Vektor $v \neq 0$, so daß $Bv = 0$. Daher $v^T B v = 0$,

was der ~~De~~Definition eines Skalarproduktes widerspricht

4.3 Ja!

Zum Beispiel ist $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ positiv-definit

und $v^T B w = v^T w$ ist ein Skalarprodukt