1)

1.1 $(\lambda-1)^2(\lambda+1)^3$ oder $(1-\lambda)^2(-1-\lambda)^3$

1.2 Der Exponent im Minimalpolynom gibt die Größe des jeweils größten Jordan-Blocks des entsprechenden Eigenwertes an:

$(\lambda-1)(\lambda+1)^2$ oder $(1-\lambda)(-1-\lambda)^2$

1.3 Eigenvektoren sind in den Spalten von V zu finden. Die entsprechenden Spalten von J haben keine „1"-Einträge auf der Nebendiagonalen. Zum Eigenwert (-1) sind die Basisvektoren des Eigenraums: v_3 und v_5

1.4 Man zählt jeweils die Spalten ohne „1"-Einträge auf der Nebendiagonale. Die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$ haben jeweils geometrische Vielfachheit 2.

1.5 v_4

1.6 $\det(A) = \det(VJV^{-1}) = \det(V)\det(J)\det(V^{-1})$

$= \det(V)\det(J)\frac{1}{\det(V)} = \det(J)$

(alternative Begründung über Eigenwerte und algebraische Vielfachheit möglich)

$\det(A) = -1$ (Produkt der Diagonalelemente von J, Dreiecksmatrix, Alternativen z.B. Laplace)

1.7 Ja, da $|\det(A)| = 1$ ‖ 1.8 Nein, da $\det(A) < 0$

1.9 Eine symmetrische Matrix $\in \mathbb{R}^{n\times n}$ wäre diagonalisierbar. A ist nicht diagonalisierbar $\Rightarrow$ Nein!

2)

2.1 $$Mv_i = (\lambda_1 v_1 v_1^T + \lambda_2 v_2 v_2^T + \lambda_3 v_3 v_3^T) v_i$$

$$= \lambda_1 v_1 (v_1^T v_i) + \lambda_2 v_2 (v_2^T v_i) + \lambda_3 v_3 (v_3^T v_i)$$

Da die v_i ein ONS bilden, sind die Skalarprodukt $v_j^T v_i$ jeweils 0 für $j \neq i$ und 1 für $j = i$.
Daher $Mv_i = \lambda_i \cdot v_i \cdot 1 = \lambda_i v_i$.
Das bedeutet, dass v_i ein Eigenvektor zu M zum Eigenwert λ_i ist.

2.2 Der Eigenwert 0 mit algebraischer Vielfachheit $m \geq 1$, bedeutet dass es zumindestens einen Vektor $v \neq 0$ gibt mit $Av = 0$, d.h. der Kern von A ist nicht-trivial und $\boxed{\operatorname{def}(A) = \dim(\ker(A)) \geq 1}$.
Andererseits ist die geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes immer kleiner als oder gleich seine algebraische Vielfachheit, damit die Dimension des Eigenraums von A zum Eigenwert $\lambda = 0$ kleiner als m oder gleich m,
daher $\boxed{\operatorname{def}(A) = \dim(\text{Eigenraum von } A \text{ zum Eigenwert } 0) \leq m}$.

Alternative Begründungen möglich

3) Gram-Schmidt-Verfahren (alternative Ausformulierung möglich)

1. f_1 normieren:

$$\|f_1\| = \sqrt{\langle f_1 | f_1 \rangle} = \sqrt{\int_0^1 \overline{f_1(x)}\, f_1(x)\, dx} = \sqrt{\int_0^1 1\, dx}$$

$$= \sqrt{[x]_0^1} = \sqrt{1} = 1$$

$\Rightarrow$ f_1 ist bereits normiert, daher $\underline{g_1 = f_1 = 1.}$

2. f_2 auf g_1 projizieren:

$$g_1 \cdot \langle g_1 | f_2 \rangle = \int_0^1 \overline{g_1(x)}\, f_2(x)\, dx = \int_0^1 ix\, dx$$

$$= i \int_0^1 x\, dx = i \left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \tfrac{1}{2} i.$$

3. Residuum berechnen:

$$r_2 = f_2 - g_1 \langle g_1 | f_2 \rangle = ix - \tfrac{1}{2} i = i\left(x - \tfrac{1}{2}\right).$$

4. Norm von r_2 berechnen:

$$\sqrt{\langle r_2 | r_2 \rangle} = \sqrt{\int_0^1 -i\left(x-\tfrac{1}{2}\right) \cdot i\left(x-\tfrac{1}{2}\right) dx}$$ (Konjugation beachten)

$$= \sqrt{\int_0^1 \left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2 dx} = \sqrt{\left[\tfrac{1}{3}\left(x-\tfrac{1}{2}\right)^3\right]_0^1}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{24} + \frac{1}{24}} = \sqrt{\frac{1}{12}} = \|r_2\|$$

$$\Rightarrow g_2 = \frac{r_2}{\|r_2\|} = \sqrt{12}\, i\left(x - \tfrac{1}{2}\right).$$

4)

4.1 $(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2) = \underline{\lambda\cdot(\lambda-1)}$

4.2 wegen Cayley-Hamilton gilt $A\cdot(A-1)=0$,

daher $A^2-A=0$, daher $A^2=A$.

4.3 zu zeigen, wenn $A^{n-1}=A$, dann auch $A^n=A$

(Induktionsschritt)

$$A^{n-1}=A \Rightarrow A\cdot A^{n-1} = A\cdot A$$

$$\Rightarrow A^n = A^2$$

und wegen $A^2=A$ gilt daher $A^n=A$ für $n\geq 1$

4.4

$$\exp(A) = I + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 \ldots$$

$$= I + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2}A + \frac{1}{3!}A \ldots$$

$$= I + \underbrace{\left(\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}\ldots\right)}\cdot A$$

$$= I + (e-1)\cdot A$$

q.e.d.