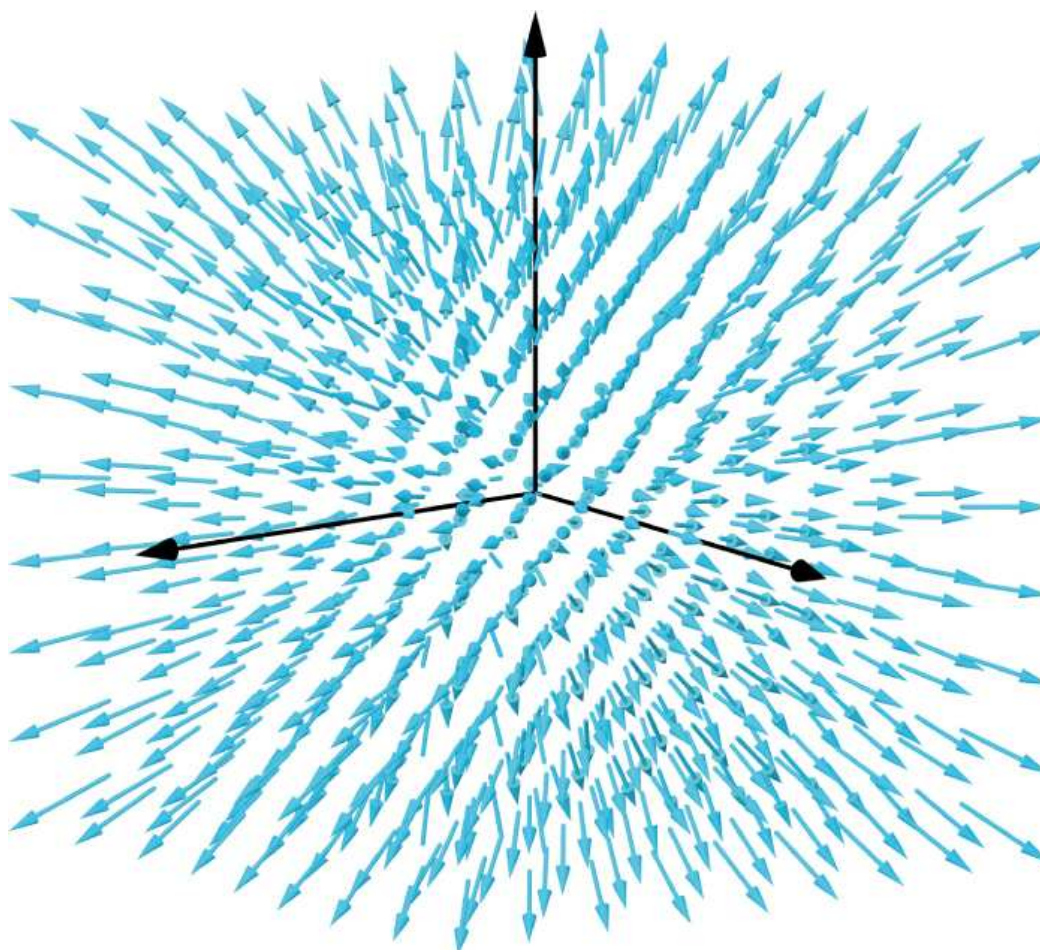


Lösungen zum 3. Aufgabenblatt

Die Lösungen wurden erstellt von: Isabel Voigt, Vanessa Lamm und Matthias Rehder

Hinweis: Eine Liste der zur Bearbeitung verwendeten Literatur ist unter www.mathematikwelt.com aufrufbar. Insgesamt 1325 Wörter

Aufgaben Nr.	Ü1	Ü2	Ü3	Ü4		Σ
Erreichte Punkte:						



Darstellung eines dreidimensionalen Vektorfelds mittels Pfeilchen

Übersicht:

Aufgabe 1: Komplexe Zahlen, Lösen von Gleichungen

Aufgabe 2: a) Matrizen und Körpereigenschaften

b) Lösbarkeit von GLS, Lemma über die impliziten Funktionen

Aufgabe 3: Falk-Schema

Aufgabe 4: Zwei leichte Beweisaufgaben zu Matrixoperationen

Aufgabe 1:

Wir wollen mit unseren Vorüberlegungen zu den Lösungen für Aufgabenblatt 2 (Aufgabe 5) nun eine eindeutige Lösung des Gleichungssystems in dem Banachraum $\mathbb{C} := \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ finden (Hinweis: $\mathbb{C}$ ist isomorph zu $\mathbb{R}^2$). Was wir dazu benötigen, sind ausschließlich einfache Grundlagen bezüglich der komplexen Operationen. Legen wir also los:

Gesucht: Alle Lösungen der Gleichung $a^2 + 2a + 2 = 0$

Lösung: (Regel: Mit $(x, y), (u, v) \in \mathbb{C}$ gilt $(x, y) \cdot (u, v) := (xu - yv, xv + yu)$)

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_x^2 - a_y^2 \\ a_x a_y + a_y a_x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a_x \\ 2a_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_x^2 - a_y^2 + 2a_x + 2 \\ a_x a_y + a_y a_x + 2a_y + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_x^2 - a_y^2 + 2a_x + 2 \\ 2a_x a_y + 2a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nun notieren wir uns zwei Gleichungen und lösen diese dann auf:

$$2a_x a_y + 2a_y = 0 \quad \underset{\text{offensichtlich}}{\Rightarrow} \quad a_x = -1 \vee a_y = 0$$

Nun setzen wir beide erhaltenen Lösungen in die erste Gleichung ein:

$$a_x^2 - a_y^2 + 2a_x + 2 = 0 \quad (a_x = -1)$$

$$1^2 - a_y^2 - 2 + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a_y^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad a_y = \pm 1 \quad (\text{Wurzel liefert 2 Lösungen}) \quad \heartsuit$$

$$a_x^2 - a_y^2 + 2a_x + 2 = 0 \quad (a_y = 0)$$

$$\Leftrightarrow a_x^2 - 0^2 + 2a_x + 2 = 0$$

$\Leftrightarrow a_x^2 + 2a_x + 2 = 0$ ☹ unser „alter Bekannter“, (nämlich die Ausgangsgleichung) liefert keine reellen Lösungen, damit haben wir in $\heartsuit$ bereits alle Lösungen erhalten.

Folgende $l_{1,2} \in \mathbb{R}^2$ sind damit unsere Lösungen: $l_1 := (-1, 1)^T$ und $l_2 := (-1, -1)^T$.

Aufgabe 2:Teil a:

Wir wiederlegen die Körpereigenschaften für 3er- und 4er-Tupel, indem wir die Kommutativgesetze wiederlegen.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae - bf - cg - dh \\ af + be + ch - dg \\ ag - bh + ce + df \\ ah + bg - cf + de \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2 - 1 - 2 \\ 2 + 1 + 1 - 2 \\ 1 - 1 + 1 + 4 \\ 1 + 1 - 2 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2 - 1 - 2 \\ 1 + 2 + 2 - 1 \\ 1 - 4 + 1 + 1 \\ 2 + 2 - 1 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Damit sind wir fertig, denn die Kommutativität ist aufgrund der Körpervoraussetzung der abelschen Gruppe nicht erfüllt. Leicht hätte man auch allgemein (ohne konkrete Zahlen) die Kommutativität wiederholen können.

Teil b:

Wir führen den Beweis bezüglich der Auflösbarkeit des Gleichungssystems mit zwei unterschiedlichen Varianten vor:

- Erstens mit **Mitteln der Linearen Algebra 1:**

Aus der Vorlesung wissen wir, dass $\mathbb{R}^3$ über dem Körper $\mathbb{R}$ mit den uns als Addition und Multiplikation bekannten Verknüpfungen einen Vektorraum bildet und die Lösungsmenge eine Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ bildet. Demzufolge haben wir also nur das Untergruppenkriterium nachzuprüfen:

Definition: [**Untervektorraum**]

Sei V ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum und $U \subset V$, dann nennen wir U einen Untervektorraum $\Leftrightarrow$ die folgenden Eigenschaften gelten:

- (a) $\emptyset \neq U$
- (b) $\forall a, b \in U : a + b \in U$
- (c) $\forall \tau \in U, \omega \in \mathbb{K} : \omega \cdot \tau \in U$

Beweis:

- (a) Der Vektor $(0, 0, 0)^T$ löst das GLS, demnach ist $\emptyset \neq U$
- (b) Seien nun $(x_1, y_1, z_1)^T$ und $(x_2, y_2, z_2)^T$ zwei Lösungen des GLS, dann gilt aufgrund der Distributivitätsgesetze der Matrixmultiplikation: Sei $A \in \mathbb{R}^3$
 $A \cdot (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)^T = A \cdot (x_1, y_1, z_1)^T + A \cdot (x_2, y_2, z_2)^T = (0, 0, 0)^T + (0, 0, 0)^T = (0, 0, 0)^T$. Hiermit ist die Summe zweier Lösungen eine Lösung des GLS (wie bereits beweisen).
- (c) Seien nun $(x_1, y_1, z_1)^T$ eine Lösung und $\tau \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$A \cdot \begin{pmatrix} \tau \cdot x_1 \\ \tau \cdot y_1 \\ \tau \cdot z_1 \end{pmatrix} = \tau \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \tau \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Was kann man nun hieraus interpretieren? Naja, jedes Vielfache (Multiplikation mit einem reellen Skalar) einer Lösung des GLS löst dann ebenfalls das GLS. Wir haben also die Erfüllung aller drei Unterraumkriterien nachgewiesen, also ist die Menge aller Lösungen des GLS ein Unterraum. ■

- Zweitens Ergänzungen mit **Mitteln der Analysis 3 und Linearen Algebra 2:**

Wir greifen hierfür das Lemma über die impliziten Funktionen auf und zeigen als Trivialbeispiel (Anzahl der Unbekannten gleich der Anzahl an Gleichungen) die geforderte Auflösbarkeit des GLS.

Erinnerung: [Lemma über die impliziten Funktionen in der allg. Banachraum Fassung]

Sei $F : G \rightarrow W$ eine stetig differenzierbare (C^1 –) Abbildung auf der offenen Menge G in V und sei F in $a \in G$ submersiv. Ferner sei $V = V_1 \times V_2$ eine Zerlegung von V derart, dass $(D_2F)_a = (DF)_a|_{V_2} : V_2 \rightarrow W$ bijektiv ist. Schließlich sei $a = (a_1, a_2)$ mit $a_1 \in V_1$ und $a_2 \in V_2$ sowie $b := F(a) = F(a_1, a_2)$. Dann gibt es eine offene Umgebung U_1 von a_1 in V_1 und U_2 von a_2 in V_2 , sowie eine stetig differenzierbare Abbildung $g : U_1 \rightarrow U_2$ mit folgenden Eigenschaften:

- (a) $U_1 \times U_2 \subset G$.
- (b) $F^{-1}(b) \cap (U_1 \times U_2) = \mathbb{I}(g) = \{(x, y) \in U_1 \times U_2 \mid y = g(x)\}$ Genau dann ist also $(x, y) \in U_1 \times U_2$ eine Lösung der Gleichung $F(x, y) = b$, wenn $y = g(x)$ ist.
- (c) Für $x \in U_1$ ist $(D_2F)_{(x, g(x))} (D_1F)_{(x, g(x))} : V_2 \rightarrow W$ invertierbar und es gilt $(Dg)_x = -(D_2F)_{(x, g(x))}^{-1} (D_1F)_{(x, g(x))}$.
- (d) Ist F eine C^k – Abbildung, $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty, \omega\}$, so ist auch g eine C^k – Abbildung.
- (e) Eine Abbildung $g : U_1 \rightarrow U_2$ sei übrigens durch die Gleichung $F(x, y) = F(a_1, a_2) = b$ implizit definiert.

Der Beweis für dieses Lemma würde ca. 8 weitere Seiten in Anspruch nehmen, daher verweise ich nur auf meine Textseite „Analysis 3 (WS 10/11).

Wir haben hier also offensichtlich nur die Invertierbarkeit der Funktionalmatrix zu zeigen. Demnach beginnen wir mit:

$$f_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } f_1(x, y, z) := x + 2y + 3z$$

$$f_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } f_2(x, y, z) := 3x + 6y + 8z$$

$$f_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } f_3(x, y, z) := 4x + 8y + 11z$$

Und

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ mit } F(x, y, z) := (f_1, f_2, f_3)^T$$

Als Zusammensetzung von C^1 – Abbildungen (1 Mal stetig total differenzierbar, Beweis trivial) ist F ebenfalls eine C^1 – Abbildung. Es gilt weiterhin $F(0, 0, 0) = (0, 0, 0)^T$. Demnach sind alle Voraussetzungen für den Satz über die impliziten Funktionen erfüllt,

denn $\mathbb{R}^3$ ist ganz offensichtlich eine offene Banach-Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Wir stellen nun die Jacobi Matrix mit $a \in \mathbb{R}^3$ (beliebig) von F auf:

$$J_F(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(a) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(a) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(a) & \frac{\partial f_3}{\partial z}(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(a) \\ \nabla f_2(a) \\ \nabla f_3(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 8 \\ 4 & 8 & 11 \end{pmatrix}$$

Zu zeigen ist nun bloß noch, dass die Determinante der Funktionalmatrix ungleich 0 ist, denn dann ist unsere Matrix umkehrbar nach dem Umkehrsatz:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 8 \\ 4 & 8 & 11 \end{pmatrix} \stackrel{\substack{\text{Entwicklungssatz} \\ \text{von Laplace}}}{=} 0$$

Aber offensichtlich ist die Determinante nach der Regel von Sarrus 0, demzufolge ist die Matrix nicht umkehrbar und das GLS nach diesem Kriterium wohl nicht nach einer Variablen auflösbar, aber insgesamt lösbar ($x = y = z = 0$).

Aufgabe 3:

Wir finden die Lösung $L := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Aber warum?

Wir untersuchen dazu zuerst das Produkt:

$$L \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 8 \\ 4 & 8 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 4 & 8 & 11 \end{pmatrix} \heartsuit$$

Gucken wir genau hin, dann stellen wir sofort fest, dass die erste und dritte Zeile der gegebenen Matrix erhalten bleiben. Die erste und dritte Zeile der Matrix L entsprechen der Einheitsmatrix des $\mathbb{R}^3$. Um die zweite Zeile durch die Summendarstellung des -3 fachen der ersten Zeile und des 1 –fachen der zweiten Zeile zu ersetzen, muss dann jeweils logischerweise der obere Eintrag mit -3 und der 2te Zeileneintrag mit 1 multipliziert werden. Selbstverständlich gibt es noch mehrere Lösungen für die Gleichung $\heartsuit$, doch unsere Matrix L ist diejenige, welche unabhängig von der Ausgangsmatrix die geforderte Zeilenumformung ausführt. Wir nennen unser L auch „Elementarmatrix“.

Aufgabe 4:Teil a:

Die Spur $sp(A)$ einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist definiert als die Summe ihrer Diagonalelemente. Wir haben dann zu zeigen, dass für die Spur einer Matrix die Kommutativität mit $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ in der Form $sp(AB) = sp(BA)$ gilt.

Der Beweis hierzu ist ganz einfach, denn wir müssen im Hauptteil nur ein bisschen mit dem Summenzeichen spielen:

Beweis:

Seien $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ (um die Existenz der Produkte zu sichern), dann überlegen wir uns als Folgerung aus der Produktformel basierend auf dem Falk-Schema (mit $j = i$) die folgende Summendarstellung der Diagonalelemente AB und BA :

$$sp(AB) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} b_{ji} \quad \text{und} \quad sp(BA) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n b_{ji} a_{ij}$$

Nun können wir auch noch die Kommutativität der Multiplikation und der Addition ausnutzen und die Elemente sinnvoll umordnen.

$$sp(BA) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n b_{ji} a_{ij} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ji} b_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} b_{ji} = sp(AB)$$

Und damit haben wir bereits alles gezeigt. **Q. E. D.**

Teil B:Notation [**Inverse Matrizen**]

Für jeden Körper $\mathbb{K}$ und jedes $n \in \mathbb{N}^*$ ist dann $GL(n; K) := \{A \in M(n \times n; K) : A \text{ ist invertierbar}\}$ mit der Multiplikation von Matrizen als Verknüpfung eine Gruppe.

Für jeden Körper $\mathbb{K}$ und jedes $n \geq 2$ ist $GL(n; K)$ nicht abelsch. Mit $GL(n; K)$ wird die allgemeine lineare Gruppe (GL steht für „general linear“) bezeichnet.

Es seien $B, A \in \mathbb{R}^{n \times n} \in GL(n; K)$. Wir fragen uns nun nach einer Darstellung der Inversen von A^T und AB .

Die Inversendarstellung von AB verifizieren wir ganz allgemein. Wir behaupten dazu: $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ und $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Beweis: $(B^{-1} \cdot A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = E_n$ und

$$(AB)(B^{-1} \cdot A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = E_n \quad \blacksquare$$

Nun zeigen wir $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. Nach den Rechenregeln für die transponierte Matrix aus der Vorlesung resultiert:

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = E_n^T = E_n \quad \text{und} \quad (A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = E_n^T = E_n. \quad \blacksquare$$

Beispiele: Für $n = 1$ ist $A = (a)$ und $\text{rang } A = 1$ bedeutet $a \neq 0$. Dann ist

$A^{-1} = \left(\frac{1}{a}\right)$. Im Fall $n = 2$ sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $A^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix}$, wobei die

Einträge $x_1, \dots, x_4$ von A^{-1} noch unbekannt sind. Die Gleichung $AA^{-1} = E_2$ ergibt für die beiden Spalten von A^{-1} die getrennten linearen GLS

$$ax_1 + bx_2 = 1 \quad \text{und} \quad ax_3 + bx_4 = 1$$

$$cx_1 + dx_2 = 1 \quad \text{und} \quad cx_3 + dx_4 = 1$$

Die zugehörigen homogenen Systeme haben beide die Koeffizientenmatrix A und man weiß, dass $\text{rang } A = 2 \Leftrightarrow ad - bc \neq 0$. Mit etwas Rechnung erhält man durch Lösen der GLS:

$$A^{-1} := \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Mit Nachrechnen gilt:

$$\left(\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & -4 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \right)^T = \begin{pmatrix} \frac{17}{4} & -\frac{23}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{23}{8} & \frac{33}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{25}{4} & -\frac{35}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{4}{1} & -\frac{4}{-1} & \frac{2}{0} & \frac{4}{0} \end{pmatrix}^T = \left(\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & -4 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \right)^T \right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Damit sind wir mit dieser Aufgabe fertig. Es gilt also $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.