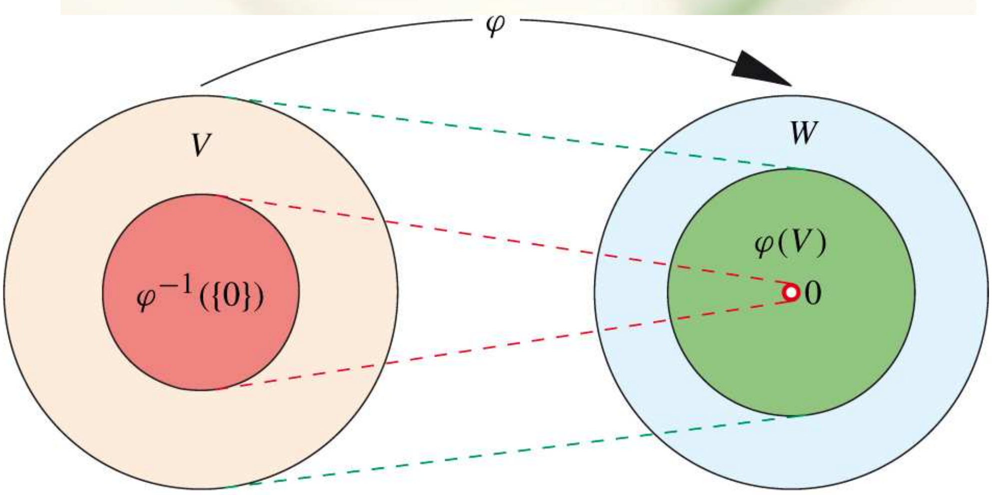
Lösungen zum 4. Aufgabenblatt

Die Lösungen wurden erstellt von: Isabel Voigt, Vanessa Lamm und Matthias Rehder

Hinweis: Eine Liste der zur Bearbeitung verwendeten Literatur ist unter www.mathematiwelt.com aufrufbar. Insgesamt 3110 Wörter

Aufgaben Nr.	Ü1	Ü2	Ü3	Ü4		∑
Erreichte Punkte:						



Der Kern und das Bild einer linearen Abbildung, der Kern kann auch sehr groß sein.

Übersicht:

Aufgabe 1: Komplexe Zahlen, Drehungen

Aufgabe 2: Aussagenanalyse über Vektoreigenschaften

Aufgabe 3: Beweise mit Vektoren, Skalarprodukt

Aufgabe 4: a) Graßmann-Identität für das wiederholte Vektorprodukt

b) Volumen eines Spats

Aufgabe 1:

Wir wollen hier das Dreieck mit den Eckpunkten $\vec{a}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ um 30° um den Ursprung drehen. Gefragt sind dabei die Koordinaten des neuen Dreiecks. Hinweis: $\sin(30°)=\frac{1}{2}$ und $\cos(30°)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Betrachten wir diese Drehung anschaulich, dann stellen wir fest, dass eine Drehung um den Winkel von 30° um den Ursprung eine Drehung der Stützvektoren der Punkte B und C (bezüglich der Stützvektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$) zur Folge hat. Punkt A beleibt dabei nach wie vor der Ursprung mit den Nullkoordinaten. Wir verwenden also die Produktformel von Aufgabenblatt 2 (letzte Aufgabe) und multiplizieren jeweils mit einem Vektor der Länge 1 (*) und dem Winkel 30°.

<u>Hilfslemma zu</u> (*)

Wir betrachten die Sinusabbildung und die Cosinusabbildung in $\mathbb{C}$, dann gilt:
$\sin^2+\cos^2=1$

<u>Beweis</u>: Wir zeigen diese Zwischenbehauptung erst ganz zum Schluss mit dem Cauchy-Produkt, denn hier würde das nur den Lesefluss stören. ♡

Damit resultiert:

$$\overrightarrow{b_{\text{gedreht}}}=\vec{b}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}\cos(30°)\\\sin(30°)\end{pmatrix}}_{\substack{\text{Länge prüfen}\\ \left|\begin{pmatrix}\sin(30°)\\\cos(30°)\end{pmatrix}\right|=\\ \sqrt{\sin^2(30°)+\cos^2(30°)}\\ =1}}=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0{,}5\cdot3^{0{,}5}\\0{,}5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1{,}5\cdot3^{0{,}5}\\1{,}5\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{c_{\text{gedreht}}}=\vec{c}\cdot\begin{pmatrix}\cos(30°)\\\sin(30°)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0{,}5\cdot3^{0{,}5}\\0{,}5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+1{,}5\cdot3^{0{,}5}\\1{,}5-2\cdot3^{0{,}5}\end{pmatrix}$$

Unser „neues" gedrehtes Dreieck hat also die Eckpunkte $\vec{a}_{neu}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{b}_{neu}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\cdot\sqrt{3}\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ und $\vec{c}_{neu}=\begin{pmatrix}-2+\frac{3}{2}\cdot\sqrt{3}\\\frac{3}{2}+2\sqrt{3}\end{pmatrix}$. Damit sind wir fertig. Eine Probe mit Verwendung von Drehmatrizen würde unser Resultat verifizieren.

Aufgabe 2:

a. Aussage: Steht ein dreidimensionaler Vektor u senkrecht auf v und w, so sind v und w parallel.
Damit ein Vektor senkrecht auf einem anderen Vektor stehe, muss definitionsgemäß das Skalarprodukt 0 ergeben. Anschaulich betrachtet stellen wir im $\mathbb{R}^3$ sofort fest, dass diese Aussage falsch sein muss. Der Vektor $u \coloneqq (1,0,0)^T$ steht senkrecht auf $v \coloneqq (0,1,0)^T$ und $w \coloneqq (0,0,1)^T$, denn das resultierende Skalarprodukt ist jeweils 0, aber die Vektoren v und w stehen ebenfalls senkrecht zueinander und können damit nicht parallel sein.

b. Aussage: Steht ein dreidimensionaler Vektor u senkrecht auf v, dann auch auf $v + 2w$. Wir werden hier beweisen, dass diese Aussage gilt.
Seien $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ beliebig. Angenommen es gelte $u \perp v$ und w, dann gilt für das Skalarprodukt $u^T \cdot v = 0$ und $u^T \cdot w = 0$ Damit können wir nun auch das Produkt $u^T \cdot (v + 2w)$ berechnen:

$$(u_1, u_2, u_3) \cdot \begin{pmatrix} v_1 + 2w_1 \\ v_2 + 2w_2 \\ v_3 + 2w_3 \end{pmatrix} = u_3 \cdot (v_3 + 2w_3) + u_2 \cdot (v_2 + 2w_2) + u_1 \cdot (v_1 + 2w_1)$$

$$\underbrace{=}_{\text{Assoziativgesetz}} \quad u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + 2(u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3)$$

$= u^T \cdot v + 2(u^T \cdot w) = 0 + 2 \cdot 0 = 0$. Nach Definition der Orthogonalität haben wir hiermit alles gezeigt. ∎

c. Für gegebene Vektoren u und v existiert eine reelle Zahl c, sodass auch $v + cu$ senkrecht auf u steht. Wir wollen diese Aussage hier beweisen und zudem noch feststellen, welche Voraussetzung für die Gültigkeit ebenfalls notwendig ist:
Seien also $u, v \in \mathbb{R}^3$ und $c \in \mathbb{R}$, dann bestimmen wir zuerst das Produkt $u^T \cdot (v + cu)$ welches ja 0 ergeben soll. $u^T \cdot (v + cu) = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + c(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)$. Transformiert man $c \coloneqq \frac{-u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$ (1) mit $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \neq 0$ (🕮), dann erhalten wir unsere Behauptung. Falls 🕮 nicht erfüllt ist, kann u nur der Nullvektor sein (der überall senkrecht drauf steht), ist die Wahl in (1) nicht erfüllt und u nicht der Nullvektor, dann gilt

die Aussage im Allgemeinen nicht. Da aber nur die Existenz eines reellwertigen c erwartet wird, ist die Gültigkeit der Aussage insgesamt verifiziert. ■

Aufgabe 3:

Generell ist dieser Beweis hier sehr leicht und kann auch mit ganz elementaren Vektoroperationen in der Schule realisiert werden.

Behauptung: Zwei Raumdiagonalen eines Würfels stehen nicht rechtwinklig zueinander.

Notation: $e = -w + u + v$ und $f = -u + v + w$.

Beweis: Wir haben zu zeigen, dass das Skalarprodukt der Raumdiagonalen e und f nicht 0 ergibt. Es gilt:

$$e^T f = (-w + u + v)^T \cdot (-u + v + w) \underbrace{=}_{\text{linear}} w^T u - w^T v - w^T w - u^T u$$

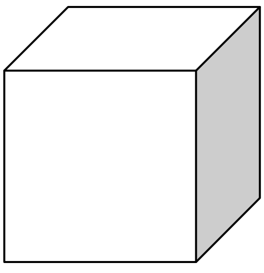
$$+u^T v + u^T w - v^T u + v^T v + v^T w \underbrace{=}_{\text{symmetrisch}}$$

$$2(w^T u) - u^T u + v^T v - w^T w = -|u|^2 \neq 0$$

Warum gilt die letzte Zeile?

Naja, die Seiten in einem Würfel sind ja wohl geleichlag, es gilt also $u^T u = v^T v = w^T w$, *demnach gilt also auch* $-u^T u + v^T v - w^T w = -u^T u$. *Außerdem stehen zwei Kantenseiten eines Würfels senkrecht zueinander und demzufolge gilt für das Skalarprodukt* $2w^T u = 0$. *Außerdem gilt* $u^T u = |u|^2$ *und somit für uns* $-u^T u = -|u|^2$

Der Beweis ist damit vollständig erbracht. ■



Aufgabe 4:

Teil a:

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}^3$, dann wollen wir die Gültigkeit der folgenden Formel beweisen:

$$a \times (b \times c) = (a^T c)b - (a^T b)c \quad (z.z.)$$

Beweis durch allgemeines nachrechnen:

$$a \times (b \times c) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 \\ -b_1c_3 + b_3c_1 \\ b_1c_2 - b_2c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(-b_1c_3 + b_3c_1) \\ -a_1(b_1c_2 - b_2c_1) + a_3(b_2c_3 - b_3c_2) \\ a_1(-b_1c_3 + b_3c_1) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2) \end{pmatrix}$$

Nun spielen wir mit dem letzten Ausdruck noch ein bisschen herum und erhalten:

$$\begin{pmatrix} a_2b_1c_2 - a_2b_2c_1 + a_3b_1c_3 - a_3b_3c_1 \\ -a_1b_1c_2 + a_1b_2c_1 + a_3b_2c_3 - a_3b_3c_2 \\ -a_1b_1c_3 + a_1b_3c_1 - a_2b_2c_3 + a_2b_3c_2 \end{pmatrix}$$

Betrachten wir nun die andere Seite der Gleichung, dann steht da:

$$(a^T c)b - (a^T b)c = (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_1b_1c_1 + a_2b_1c_2 + a_3b_1c_3 - a_1b_1c_1 - a_2b_2c_1 - a_3b_3c_1 \\ a_1b_2c_1 + a_2b_2c_2 + a_3b_2c_3 - a_1b_1c_2 - a_2b_2c_2 - a_3b_3c_2 \\ a_1b_3c_1 + a_2b_3c_2 + a_3b_3c_3 - a_1b_1c_3 - a_2b_2c_3 - a_3b_3c_3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_2b_1c_2 - a_2b_2c_1 + a_3b_1c_3 - a_3b_3c_1 \\ -a_1b_1c_2 + a_1b_2c_1 + a_3b_2c_3 - a_3b_3c_2 \\ -a_1b_1c_3 + a_1b_3c_1 - a_2b_2c_3 + a_2b_3c_2 \end{pmatrix}$$

Aus der Gleichheit der beiden allgemein verglichenen Seiten folgt unsere Behauptung. ■

Teil b:

Wir haben hier die drei folgenden Vektoren gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ und sollen das Lebesgue-Volumen Maß des Spats bestimmen.

Auffälligkeiten: Weil jeweils zwei Vektoren zueinander linear unabhängig sind, d. h. sie spannen eine Ebene auf, müssen auch alle drei Vektoren in der Ebene liegen. Das Lebesgue-Volumen Maß berechnen wir mit der Formel $\mu_s = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)^T \cdot c$.

$$\mu_s = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}\right)^T \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = (4 \cdot 8 - 7 \cdot 5, -8 + 14, 5 - 8\,) \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$(-3, 6, -3) \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = -27 + 36 - 9 = 0$$

Mit eingesetzten Werten erhalten wir also $\mu_s = 0$. Demnach beträgt das Volumen 0 VE.

Anhang (Beweis zum Hilfslemma in Aufgabe 1)

Einführung: Wir wollen hier die Beziehung $\sin(2z) = 2\sin z \cos z$ für alle $z \in \mathbb{C}$ verifizieren. Aufgrund der Aufgabenstellung werden wir hierbei zwei Realisierungsmöglichkeiten durchführen.

a. Wir verwenden das Cauchy Produkt für die Potenzreihendarstellung von $\cos x$ und $\sin x$.
   Teil 1: Kurze Variante
   Teil 2: Lange Variante
   Teil 3: Anhang und Kommentare
b. Wir verwenden die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion.
c. Außerdem werden wir hier noch eine weitere (und kürzere) Variante vorstellen.
d. Abschließend verifizieren wir das Additionstheorem $\sin^2 + \cos^2 = 1$ ebenfalls mit dem Cauchy Produkt (Ziel !!).

a. Legen wir erst einmal mit Teil a los. Die Potenzreihendarstellungen für den Sinus und für den Cosinus lauten:

$$\cos(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad (1)$$

$$\sin(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (2)$$

Teil 1: Kurze Variante

Jetzt werden wir beide Seiten der Gleichung $\sin(2z) = 2\sin z \cos z$ betrachten und danach vergleichen:

$$\sin(2z) \underbrace{=}_{\text{nach (2)}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2z)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Damit haben wir schon einmal die eine Seite umgeschrieben und wollen nun auf der anderen Seite wenn möglich dasselbe stehen haben.

$$2\sin z \cos z \underbrace{=}_{\text{(1)und(2)}} 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \underbrace{=}_{\text{Cauchy Produktformel}}$$

$$2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{(-1)^0}{0!} z^{2n+1} z^0 + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} \frac{(-1)^1}{2!} z^{2n-1} z^2 + \ \dots\ + \frac{(-1)^0}{1!} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^1 z^{2n} \right\} \underbrace{=}_{\text{Binomkoeff}}$$

$$2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left\{ \binom{2n+1}{0} z^{2n+1} z^0 + \binom{2n+1}{2} z^{2n-1} z^2 + \ \dots\ + \binom{2n+1}{2n} z^1 z^{2n} \right\} \underbrace{=}_{\text{Potenzgesetze}}$$

$$2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left\{ \binom{2n+1}{0} z^{2n+1} + \binom{2n+1}{2} z^{2n+1} + \ \dots\ + \binom{2n+1}{2n} z^{2n+1} \right\} \underbrace{=}_{\text{Summe erkannt}}$$

$$2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left\{ \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} z^{2n+1} \right\} \underbrace{=}_{\text{Schreibweise ändern}} 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} z^{2n+1}$$

Nun wenden wir die Formel aus der Fermatschen Vermutung an, die wir im Anhang beweisen werden.

$$2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k}z^{2n+1} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,2^{2n}z^{2n+1} \underbrace{=}_{Umschreiben}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,2\cdot 2^{2n}z^{2n+1} \underbrace{=}_{\text{Potenzgesetze}} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,2^{2n+1}z^{2n+1} \underbrace{=}_{\text{Potenzgesetze}} \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2z)^{2n+1}}{(2n+1)}$$

Damit sind wir dann auch (mit Verweis auf die im Anhang bewiesenen Zwischenbehauptungen) fertig. ■

Im nächsten Abschnitt stellen wir nun einen ähnlichen Beweis unter strengerer Verwendung des Cauchy Produkts dar.

Ergänzung: Weil sowohl die Potenzreihendarstellung des Sinus als auch des Cosinus auf ganz $\mathbb{C}$ absolut konvergieren (Beweis mit der in $\mathbb{C}$ absolut konvergenten Exponentialreihe als Majorante), ist das Produkt nach dem Satz von Martens ebenfalls konvergent.

Wir zeigen hierzu als Randbemerkung nur, dass die Sinusreihe auf ganz $\mathbb{C}$ konvergiert:

Behauptung: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ soll also auf ganz $\mathbb{C}$ konvergieren.

Zuerst einmal eine Definition: Die Sinusreihe sei für alle komplexen z wie folgt definiert:

$$\sin(z) := \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Die Abbildung $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $g(z) := \sin(z)$ nennen wir dabei die Sinusfunktion. Somit können wir in der folgenden Argumentation über dasselbe sprechen und ganz einfach verifizieren, dass der Konvergenzradius der Sinusreihe unendlich ist.

Beweis der Behauptung:

$$y_n := (-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{(-1)^n\cdot z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(\Omega)!}z^{\Omega} \quad mit\ \Omega := 2n+1$$

Quotientenkriterium:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^n}{(\Omega)!}}{\frac{(-1)^{n+1}}{(\Omega)!\,(2n+2)(2n+3)}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{(\Omega)!}\cdot\frac{(\Omega)!\,(2n+2)(2n+3)}{(-1)^{n+1}}\right| =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\cancel{(-1)^n}}{\cancel{(\Omega)!}}\cdot\frac{\cancel{(\Omega)!}(2n+2)(2n+3)}{(-1)^{\cancel{n}+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+2)(2n+3)}{-1}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)(2n+3)}{1} =$$

$$\lim_{n\to\infty}(2n+2)(2n+3) = \infty$$

Damit erhält man auch den Konvergenzradius von ∞. Der Konvergenzbereich ist hier demnach ebenfalls ganz $\mathbb{C}$. ☺

Teil 2: Lange Variante

Mit den folgenden Summationskoeffizienten

$$\alpha_n \coloneqq (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\beta_n \coloneqq (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\gamma_n \coloneqq (-1)^n \frac{(2z)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

ergibt sich dann mit Transformation in die komplexe Potenzreihendarstellung:

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \quad (3)$$

$$\sin(z) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \quad (4)$$

$$\sin(2z) \underbrace{=}_{\text{mit } (4)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2z)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \quad (5)$$

Außerdem gelte dann noch für die Koeffizienten des Cauchy Produkts:

$$\theta_n = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \beta_{n-j} \quad (6)$$

Schreiben wir die Behauptung $\sin(2z) = 2\sin z \cos z$ mit (3), (4), (5) und (6) um und lassen die unendlichen Sigmazeichen (aus dem Satz von Martens) weg, dann erhalten wir:

$2\theta_n = \gamma_n$ (7) Wir brauchen also bloß die Gültigkeit von (7) zu beweisen.

Beweis:

$$\theta_n \underbrace{=}_{nach\ (6)} \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \beta_{n-j} = \sum_{j=0}^{n} \underbrace{(-1)^j \frac{z^{2j+1}}{(2j+1)!}}_{=\alpha_j} \underbrace{(-1)^{n-j} \frac{z^{2(n-j)}}{\big(2(n-j)\big)!}}_{=\beta_{n-j}} \underbrace{=}_{\text{Assoziativgesetz}}$$

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \cdot (-1)^{n-j} \frac{z^{2j+1} \cdot z^{2(n-j)}}{(2j+1)! \cdot \big(2(n-j)\big)!} \underbrace{=}_{\text{Potenzgesetz}} \sum_{j=0}^{n} (-1)^n \frac{z^{2j+1+2(n-j)}}{(2j+1)! \cdot \big(2(n-j)\big)!} =$$

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2j+1)! \cdot \big(2(n-j)\big)!} \underbrace{=}_{\text{Faktoren ohne j aus der Summe holen}}$$

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2j+1)!\cdot\big(2(n-j)\big)!} = (-1)^n \sum_{j=0}^{n} \frac{z^{2n+1}}{(2j+1)!\cdot\big(2(n-j)\big)!} \underbrace{=}_{\text{Faktoren ohne j aus der Summe holen}}$$

$$(-1)^n z^{2n+1} \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{(2j+1)!\cdot\big(2(n-j)\big)!} \underbrace{=}_{\text{Nulltrick}} (-1)^n z^{2n+1} \frac{2^{2n+1}}{2^{2n+1}} \cdot \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{(2j+1)!\cdot\big(2(n-j)\big)!} \underbrace{=}_{\text{Potenzges.}}$$

$$(-1)^n (2z)^{2n+1} \frac{1}{2^{2n+1}} \cdot \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{(2j+1)!\cdot\big(2(n-j)\big)!} \underbrace{=}_{\text{siehe Anhang}} (-1)^n (2z)^{2n+1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2n+1)!} =$$

$$(-1)^n \cdot \frac{(2z)^{2n+1}}{2(2n+1)!} \Rightarrow 2\theta_n = 2\cdot(-1)^n \cdot \frac{(2z)^{2n+1}}{2(2n+1)!} \underbrace{=}_{\text{kürzen!}} (-1)^n \cdot \frac{(2z)^{2n+1}}{(2n+1)!} \underbrace{=}_{\text{umschreiben}} \gamma_n$$

Damit haben wir (mit Verweis auf die im Anhang bewiesenen Zwischenbehauptungen) alles gezeigt. ■

Teil 3: Anhang und Kommentare

Erstes Ziel: Wir wollen die Darstellung $2^{2n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1}$ verstehen. Dazu sind vorab einige Vorüberlegungen notwendig:

1.0 Definition [**Binomialkoeffizient**]:

Seien $n, k \in \mathbb{N}$ mit $1 \le k \le n$, dann setzen wir

(i) $\binom{n}{k} := \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$

(ii) $\binom{n}{0} := 1$

1.1 Lemma: [Es gilt $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ für $0 \le k \le n$.

Beweis zu Lemma 1.1: Die Behauptung erfolgt unmittelbar durch erweitern der Definition 1.0 (i) mit dem Faktor $(n-k)!$. ■

1. Wir wollen langsam loslegen und uns Stück für Stück zum Erreichen unseres Ziels vorarbeiten.

Abschnitt A:

Es soll folgendes gezeigt werden: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ Dies nennt man die Spiegelungseigenschaft.
Dazu wenden wir die Definition des Binomialkoeffizienten auf die rechte Seite an und prüfen, ob wir durch geschickte Umformung die rechte Seite erhalten. Es wird ebenfalls die andere Richtung geprüft, um auf eine Äquivalenz schließen zu können.

Es gilt: $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-n+k)!}$ // nach Def. des Binomialkoeffizienten

$\Leftrightarrow \frac{n!}{(n-k)!(n-n+k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}}$ // aufgrund der Körperaxiome und Def. des Binomialkoeffizienten

Es sind nun beide Richtungen gezeigt. Dadurch gilt $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Abschnitt B:

Es soll folgendes gezeigt werden: $\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k}$
Dazu gegen wir ähnlich wie in Teilaufgabe b. vor. Wir wenden dabei die Definition des Binomialkoeffizienten auf die linke Seite an.

Es gilt: $\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}+\frac{n!}{k!(n-k)!}$

$\Leftrightarrow \frac{k!n!}{(k-1)!(n-k+1)!k!}+\frac{n!}{k!(n-k)!}$ // erster Summand erweitert $\left[\cdot\frac{k!}{k!}\right]$

$\Leftrightarrow \frac{kn!}{(n-k+1)!k!}+\frac{n!(n-k+1)!}{k!(n-k)!(n-k+1)!}$ // 1. Summand gekürzt u. 2. Summand erweitert $\left[\cdot\frac{(n-k+1)!}{(n-k+1)!}\right]$

$\Leftrightarrow \frac{kn!}{(n-k+1)!k!}+\frac{n!(n-k+1)}{k!(n-k+1)!}$ // da $\frac{(n-k+1)!}{(n-k)!}=n-k+1$

$\Leftrightarrow \frac{kn!}{(n-k+1)!k!}+\frac{n!(n-k+1)}{k!(n-k+1)!}=\frac{kn!+n!(n-k+1)}{(n-k+1)!k!}$ // beide Summanden auf einen Hauptnenner zusammengefasst

$\Leftrightarrow \frac{n!(k+n-k+1)}{(n-k+1)!k!}$ // n! im Zähler nach Distributivgesetz ausgeklammert

$\Leftrightarrow \frac{n!(n+1)}{(n-k+1)!k!}=\frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!}$ // weil $n!\cdot(n+1)=(n+1)!$

$\Leftrightarrow \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!}=\binom{n+1}{k}$ // nach Definition des Binomialkoeffizienten

Damit ist wieder einmal alles gezeigt.

Abschnitt C:

Hier werden wir den allgemeinen binomischen Lehrsatz zeigen, den man sich anhand des Pascal'schen Dreiecks sehr gut einprägen kann.

Behauptung: $(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$

Beweis mit vollständiger Induktion nach n:

Induktionsanfang: n = 1
Linke Seite: $(x+y)^1=x+y$
Rechte Seite: $\sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}x^{1-k}y^k=x+y$

Linke Seite = rechte Seite

Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung sei nun für n schon bewiesen.

Induktionsschluss: [n ⇒ n + 1 (z.z.)]
Es gilt: $(x+y)^{n+1}=(x+y)^n(x+y)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k\cdot(x+y)$ nach Induktionsvoraussetzung.
Mit distributiven Ausmultiplizieren folgt:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k\cdot(x+y)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n+1-k}y^k+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1}$$

Nach Indextransformation und Umnummerierung in der 2. Summe folgt:

$$=x^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{n+1-k}y^k+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1}+y^{n+1}$$

$$=x^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right)x^{n+1-k}y^k+y^{n+1}$$

Nach Anwendung der Additionsformel für Binomialkoeffizienten und Indexverschiebung erhält man:

$$= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k + y^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k$$

<u>Kleines Ziel</u>:

Wir wollen die folgende Beziehung vom Aufgabenblatt für ein beliebiges $m \in \mathbb{N}$ nachweisen:

$$2^m = (1+1)^m = \binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \binom{m}{3} + \ldots + \binom{m}{m} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \quad (8)$$

Setzen wir dazu $x = 1$ und $y = 1$ in den binomischen Lehrsatz aus Abschnitt C ein, dann resultiert:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{=}_{\text{für m:=n}} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}$$

// $1^{n-k}1^k \underbrace{=}_{\text{Potenzgesetze}} 1^n = 1 \; \forall n \in \mathbb{N}$

Damit haben wir also unsere erste Beziehung bereits gezeigt. ■

<u>Großes Ziel</u>:

Nun wollen wir die in der Fermatschen Vermutung auftretende Summenformel beweisen.

Wir behaupten also folgende Gleichheit:

$$\frac{1}{2^{2n+1}} \cdot \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{(2j+1)! \cdot \big(2(n-j)\big)!} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2n+1)!}$$

Dies formen wir jetzt erst mal ein bisschen um und multiplizieren beide Seiten mit 2^{2n+1}:

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{(2j+1)! \cdot \big(2(n-j)\big)!} = \frac{2^{2n}}{(2n+1)!} \quad (9)$$

Eine weitere Multiplikation von (8) mit $(2n+1)!$ liefert:

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{(2n+1)!}{(2j+1)! \cdot \big(2(n-j)\big)!} = 2^{2n} \quad (10)$$

Die Begründung in der Realisierung von Schritt (9) liegt in der folgenden Beziehung:

$$\frac{(2n+1)!}{(2j+1)!\cdot\big(2(n-j)\big)!}=\frac{(2n+1)!}{(2j+1)!\cdot\Big(\big((2n+1)-(2j+1)\big)\Big)!}=\binom{2n+1}{2j+1}\quad(11)$$

Unter Anwendung der Beziehung (11) lässt sich (10) auch schreiben als:

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{2n+1}{2j+1}=2^{2n}\quad(12)$$

Wie kommt es zu (12) ?

Einerseits gilt nach dem Binomischen Lehrsatz und dessen Folgerung (8) offensichtlich

$$\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{k}=2^{m}$$

Setzen wir für unsere Potenz nur ungerade Zahlen ein, dann erhalten wir mit $m\coloneqq 2n+1$ für $n\in\mathbb{N}$:

$$\sum_{j=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{j}=2^{2n+1}$$

Weiterhin gilt mit Zerlegung der Summe:

$$\sum_{j=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{j}=\sum_{j=0}^{n}\binom{2n+1}{2j+1}+\sum_{j=0}^{n}\binom{2n+1}{2j}$$

// Wir haben hier nur die Summe aller natürlichen j in die Summanden mit ungeradem j und in die Summanden mit dem geraden j zerlegt.

Rückblick:

Wir wollen die folgende Summenbeziehung beweisen:

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{2n+1}{2j+1}=2^{2n}\quad(12)$$

und haben bereits folgendes hergeleitet:

$$2\cdot 2^{2n}=2^{2n+1}=\sum_{j=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{j}=\sum_{j=0}^{n}\binom{2n+1}{2j+1}+\sum_{j=0}^{n}\binom{2n+1}{2j}\quad(13)$$

Vergleicht man (13) und (12), dann stellt man fest, dass die rechte Seite von (12) das doppelte der ganz linken Seite von (13) ist. Demnach ist (12) auch das doppelte der ganz rechten Seite von (13). Um (12) zu verifizieren genügt es also zu beweisen, dass die linke Seite von (12) die Hälfte der rechten Seite von (13) ist. Wir werden also folgendes zeigen:

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{2n+1}{2j+1} = \frac{1}{2}\left[\sum_{j=0}^{n}\binom{2n+1}{2j+1} + \sum_{j=0}^{n}\binom{2n+1}{2j}\right]$$

Dies schreiben wir noch einmal schön um und multiplizieren distributiv aus, dann steht da:

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{2n+1}{2j+1} = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n}\binom{2n+1}{2j+1} + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n}\binom{2n+1}{2j} \quad \Big| -\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n}\binom{2n+1}{2j+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n}\binom{2n+1}{2j+1} = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n}\binom{2n+1}{2j} \quad \Big| \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=0}^{n}\binom{2n+1}{2j+1} = \sum_{j=0}^{n}\binom{2n+1}{2j} \quad (14)$$

Wenn wir einen Beweis für (14) haben, dann wären wir komplett fertig, also legen wir mal fleißig los:

Nach Definition des Binomialkoeffizienten (Abschnitt A) gilt:

$$\binom{2n+1}{2j+1} = \binom{2n+1}{(2n+1)-(2j+1)} = \binom{2n+1}{2n-2j}$$

Dies wenden wir nun gezielt an und erhalten:

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{2n+1}{2j+1} = \sum_{j=0}^{n}\binom{2n+1}{(2n+1)-(2j+1)} = \underbrace{\sum_{j=0}^{n}\binom{2n+1}{2n-2j}}_{\diamondsuit}$$

Jetzt wenden wir auf das vorgegangene Resultat noch einmal die Formal aus Abschnitt A an, denn es wird in $\diamondsuit$ so aufsummiert, dass unten im Binomialkoeffizienten nacheinander $2n, 2n-2, 2n-4, \dots, 2, 0$ stehen. Natürlich kann man aufgrund der Unterkörpereigenschaft $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ (Kommutativgesetzte bezüglich der Addition) die Summationsreihenfolge ändern und so aufsummieren, dass unten im Binomialkoeffizienten nacheinander $0, 2, 4, \dots\ 2n-2, 2n$ stehen. Es gilt demnach:

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{2n+1}{2j+1} = \sum_{j=0}^{n}\binom{2n+1}{(2n+1)-(2j+1)} = \sum_{j=0}^{n}\binom{2n+1}{2n-2j} = \sum_{j=0}^{n}\binom{2n+1}{2j}$$

Damit haben wir aber unsere Behauptung (14) gezeigt und sind vollständig fertig. ■

b. Es sind $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ und $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}$ (15)

Wir wollen immer noch die Gültigkeit von $\sin(2z) = 2\sin z \cos z$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit Verwendung von (15) zeigen.

Zu zeigen ist also:

$$\sin(2z) = \frac{e^{i2z} - e^{-i2z}}{2}$$

<u>Beweis</u> (durch nachrechnen):

$$2\sin z \cos z = 2\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \cdot \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = 2\frac{\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) \cdot \left(e^{iz} + e^{-iz}\right)}{4} \underbrace{=}_{\text{3.binomische Formel}}$$

$$2\frac{\left(e^{iz}\right)^2 - \left(e^{-iz}\right)^2}{4} \underbrace{=}_{\substack{\text{kürzen und} \\ \text{Potenzgesetze}}} \frac{e^{i2z} - e^{-i2z}}{2}$$

Damit haben wir unsere Behauptung vollständig gezeigt. ■

c. Es gibt eine noch kürzere Variante, die Gültigkeit von $\sin(2z) = 2\sin z \cos z$ für alle $z \in \mathbb{C}$ zu beweisen. Diese führen wir hier als Exkurs vor.

Wir setzen hierzu das Additionstheorem $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ als „alter Bekannter" aus der Vorlesung voraus (**). Verwenden wir nun $2z = z + z$ geschickt, dann erhalten wir:

$$\sin(z + z) = \sin z \cos z + \cos z \sin z \underbrace{=}_{\substack{\text{distributiv} \\ \text{ausklammern}}} \sin z \cos z\,(1 + 1) \underbrace{=}_{\text{rechnen}}$$

$$\sin z \cos z\,(2) \underbrace{=}_{\text{umsortieren}} 2\sin z \cos z.$$

Damit wäre unser Beweis erbracht (nur unter der Voraussetzung ** möglich) ■

d. Und nun widmen wir uns unserer eigentlichen Zwischenbehauptung:

[**Trigonometrischer Pythagoras**]

Mithilfe des Cauchy-Produkts zeigen wir dazu $\sin^2 + \cos^2 = 1$, also

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)^2 + \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right)^2 = 1$$

<u>Bekannt ist dabei die Gültigkeit von</u>:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} = (1-1)^n = 0$$

Diese Gleichung besagt nicht anderes als die Beziehung $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, welche auch schon im Brückenkurs gezeigt wurde. Die einzelnen Reihendarstellungen entsprechen nämlich den Definitionen der Potenzreihen-darstellung vom Sinus und vom Cosinus.

<u>**Beweis Nr. 1 [„schöner Beweis in Kurzform“]:**</u>

- Zuerst betrachten wir die beiden quadrierten Summanden in zwei separaten Abschnitten. Danach bilden wir erst die Summe:

<u>**Teil 1:**</u> [„ $\cos(x) \cdot \cos(x)$“]

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right)^2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!}\right)^2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!}\right) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot \frac{(-1)^0}{0!} x^{2n} \cdot x^0 + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!} \cdot \frac{(-1)^1}{2!} x^{2n-2} x^2 + \ldots + \frac{(-1)^0}{0!} \cdot \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^0 x^{2n}\right\} =$$

// Nun wenden wir das Potenzgesetz der Addition zweier Exponenten mit gleicher Basis an:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\left\{\binom{2n}{0} x^{2n} + \binom{2n}{2} x^{2n} + \ldots + \binom{2n}{2n} x^{2n}\right\} =$$

$$(⌛) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} x^{2n}$$

Nun folgt der <u>**2. Teil:**</u>

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)^2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)^2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) \underbrace{=}_{(👍)}$$

(👍): Ähnliche Rechenschritte wie bereits im 1. Teil.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot\frac{(-1)^0}{1!}x^{2n+1}\cdot x^1+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\cdot\frac{(-1)^1}{3!}x^{2n-1}x^3+\ \dots+\frac{(-1)^0}{1!}\cdot\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^1x^{2n+1}\right\}=$$

// Nun wenden wir erneut das Potenzgesetz der Addition zweier Exponenten mit gleicher Basis an:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot\frac{(-1)^0}{1!}x^{2n+2}+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\cdot\frac{(-1)^1}{3!}x^{2n+2}+\ \dots+\frac{(-1)^0}{1!}\cdot\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+2}\right\}=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+2)!}\left\{\cdot\binom{2n+2}{1}x^{2n+2}+\binom{2n+2}{3}x^{2n+2}+\ \dots+\binom{2n+2}{2n+1}x^{2n+2}\right\}=$$

// jetzt spielen wir noch ein bisschen mit den Indizes der Summe herum

$$(✈)\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!}\left\{\cdot\binom{2n}{1}x^{2n}+\binom{2n}{3}x^{2n}+\ \dots+\binom{2n}{2n-1}x^{2n}\right\}=$$

// man kann in (✈) schon erkennen, dass bei Summenbildung mit (⌛) vieles wegfallen wird.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}x^{2n-1}=$$

// N.R.: a) $2n-2+1=2n-1\quad\Leftrightarrow\quad 2n-1=2n-1$

b) $2k+1=2k_1-1\quad\Leftrightarrow\quad 2k+1=2k+2-1\quad\Rightarrow k_1:=k+1$

// Der Index der zweiten Summe wird nun mit vorangegangener Nebenrechnung verändert:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!}\sum_{k=1}^{n}\binom{2n}{2k-1}x^{2n-1}=$$

Jetzt betrachten wir das Resultat einer **Addition beider Summanden**:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}x^{2n}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}x^{2n-1}$$

Eine weitere Indexveränderung liefert aufgrund von $\frac{(-1)^0}{(2\cdot 0)!}\sum_{k=0}^{0}\binom{2n}{2k}x^{2n}=\frac{1}{0!}\cdot 1=1\cdot 1=1$ □nd $\binom{n}{n}=1\ \ \forall n\in\mathbb{N}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}x^{2n}+1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}x^{2n-1}=$$

// Aufgrund der Kommutativität und Distributivität in reellwertigen Summen sowie nach Anwendung der Produktformel von Augustin Louis Cauchy folgt:

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}x^{2n}-\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}x^{2n}\right)=$$

// Das Minuszeichen erklärt sich durch das Ausklammern des Faktors $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}$ *aus* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!}$.

// da $\binom{2n}{2n}x^{2n}=x^{2n}$ *gilt folgendes:*

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left[\binom{2n}{2k}x^{2n}-\binom{2n}{2k+1}x^{2n}\right]+x^{2n}\right)=$$

// Den Ausdruck in der runden Klammer kann man auch geschickt umformen:

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\sum_{\Omega=0}^{2n}(-1)^{\Omega}\binom{2n}{\Omega}x^{2n}=$$

// Für den letzten Faktor wenden wir nun den vorgegebenen Trick an. Die Gültigkeit des Tricks wird hierbei nicht extra nachgewiesen.

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot 0$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}$ **konvergiert** nach dem Leibniz-Kriterium, denn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot t_n$ mit der Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}:=\frac{1}{(2n)!}$ ist alternierend aufgrund des Faktors $(-1)^n$. Es handelt sich bei (t_n) um eine monoton fallende Nullfolge, weil es gilt: $\lim_{n\to\infty}(t_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}1}{\lim\limits_{n\to\infty}(2n)!}=\frac{1}{\infty}$ und aus der Vorlesung wissen wir, dass $\frac{1}{\infty}:=0$. Damit ist die eigentlich offensichtliche Nullfolgeneigenschaft nachgewiesen. Es bleibt die fallende Monotonie zu zeigen: $\frac{1}{(2n)!}\le\frac{1}{(2n-1)!}\ \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ (z. z.) $\Leftrightarrow\ \left((2n-1)!\le(2n)!\ \Leftrightarrow\ 1\le 2n\ \Leftrightarrow\ \frac{1}{2}\le n\right)$. Weil $\frac{1}{2}\le n$ für alle natürlichen n (ohne die Null !!) gilt, haben wir die Konvergenz nach dem Leibniz-Kriterium nachgewiesen. ■

Warum mussten wir die Konvergenz zeigen?

(a) ☐ Um Verwirrung zu stiften. Falsche Aussage!

(b) ☒ Weil Null multipliziert mit einem endlichen Wert wieder Null als Resultat ergibt. Wahre Aussage!

Ergänzung: Wäre die Reihe divergent, dann könnte dort mit der harmonischen Reihe zum Beispiel ein Ausdruck $0\cdot\infty$ stehen, von dem wir nicht wissen, was da genau rauskommt. (Dieser Ausdruck wurde jedenfalls nicht in der Vorlesung eingeführt).

Mit der Konvergenz ist ein endlicher Wert der Reihe garantiert und es folgt (da 0 Nullelement):

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot 0=1+0=\mathbf{1}$$ □nd d□mit sind wir d□nn □□ch fertig. ♥

Auf unsere schöne 1. Beweisführung kamen wir nicht sofort, davor mussten zuerst ca. 10 Seiten voll geschrieben werden und rumprobiert werden. Gleich wird noch eine rumprobierte Beweisidee vorgeschlagen, welche aber nicht besonders schön ist. Dies war jedoch unsere erste Version und dient nur der Vollständigkeit. Ob die zweite Version auch komplett richtig ist, können wir nicht sagen, jedoch haperte die Durchführung in der Realisierung der Addition im 2. Beweisteil. Im 1. Teil konnten wir sehr schnell und schön zu einem positiven Ende kommen. ☺

Beweis Nr. 2 [„unschöner Beweis"]:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right)^2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right) =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{k}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}(-1)^{k-n}\frac{x^{2(k-n)}}{\big(2(k-n)\big)!} =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \sum_{\substack{m=0\\ m\ gerade}}^{2k}\frac{x^m x^{2k-m}}{m!\,(2k-m)!} =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\sum_{\substack{m=0\\ m\ gerade}}^{2k}\binom{2k}{m}x^m x^{2k-m}\ \ (1) =$$

//(1) gefällt uns aber noch nicht so ganz, denn das „gerade" stört ein bisschen.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}x^{2k}x^{2n-2k} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}x^{2n}\ \ (2)$$

// (2) gefällt uns schon viel besser.

Jetzt bertachten wir nach das Quadrat des anderen Faktors:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)^2=\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)=$$

// nun folgt mit analogen Schritten wie oben:

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\sum_{\substack{m=1\\ m\ ungerade}}^{2n-1}\binom{2n}{m}x^m x^{2n-m}=$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\sum_{\substack{m=1\\ m\ ungerade}}^{2n-1}\binom{2n}{m}x^{2n}\quad(1')\ =$$

// auch hier gefällt uns $(1')$ nicht besonders (weil wir schwer damit rechnen können), demzufolge formen wir noch einmal weiter um:

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{k}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot(-1)^{k-n}\frac{x^{2k-2n+1}}{\big((2k-2n)+1\big)!}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k+2)!}\sum_{n=0}^{k}\binom{2k+2}{2n+1}x^{2n+1}x^{2k-2n+1}$$

//Indextransformation liefert:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{(2k)!}\sum_{n=0}^{k-1}\binom{2k}{2n+1}x^{2n+1}x^{2k-2n-2}=$$

//erneute Indextransformation durchführen:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n)!}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}x^{2n-1}\quad(2')$$

Damit folgt für die Summe der Quadrate mit (1) und $(1')$:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)^2+\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right)^2=$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\sum_{\substack{m=0\\ m\ gerade}}^{2k}\binom{2k}{m}x^{2k}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\sum_{\substack{m=1\\ m\ ungerade}}^{2n-1}\binom{2n}{m}x^{2n}=$$

//Indextransformation

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\sum_{\substack{m=0\\ m\ gerade}}^{2n}\binom{2n}{m}x^{2n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\sum_{\substack{m=1\\ m\ ungerade}}^{2n-1}\binom{2n}{m}x^{2n}=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\sum_{\substack{m=0\\ m\ gerade}}^{2n}\binom{2n}{m}x^{2n}-\sum_{\substack{m=1\\ m\ ungerade}}^{2n-1}\binom{2n}{m}x^{2n}\right)=$$

//"mit den Summen spielen"

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\sum_{m=0}^{2n}\binom{2n}{2m}x^{2n}\right)=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\binom{2n}{0}x^{2n}+\binom{2n}{2n}x^{2n}+\sum_{\substack{m=2\\ m\ gerade}}^{2n-1}\binom{2n}{m}x^{2n}-\sum_{\substack{m=1\\ m\ ungerade}}^{2n-1}\binom{2n}{m}x^{2n}\right)=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(2x^{2n})+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\sum_{\substack{m=2\\ m\ gerade}}^{2n-1}\binom{2n}{m}x^{2n}-\sum_{\substack{m=1\\ m\ ungerade}}^{2n-1}\binom{2n}{m}x^{2n}\right)=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(2x^{2n})+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\sum_{m=1}^{2n-1}\binom{2n}{2m}x^{2n}-\sum_{m=1}^{2n-1}\binom{2n}{2m-1}x^{2n}\right)=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(2x^{2n})+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\sum_{m=1}^{2n-1}\left(\binom{2n}{2m}x^{2n}-\binom{2n}{2m-1}x^{2n}\right)\right)=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(2x^{2n})+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\sum_{m=1}^{2n-1}x^{2n}\left[\binom{2n}{2m}-\binom{2n}{2m-1}\right]\right)=$$

Hier treten immer ein paar Ungereimtheiten mit den Indexen auf ☹, deshalb untersuchen wir nun die Summe der Quadrate mit (2) und (2′):

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)^2+\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right)^2=$$

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\sum_{k=0}^{n-1}U_k+x^{2n}\right)\quad \text{mit } U_k:=\binom{2n}{2k}x^{2n}-\binom{2n}{2k+1}x^{2n-1}$$

$$\binom{2n}{2k}x^{2n} - \binom{2n}{2k+1}x^{2n-1} = \frac{2n!}{(2n-2k)!\,(2k)!}x^{2n} - \frac{2n!}{(2n-2k-1)!\,(2k-1)!}x^{2n-1}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{n}{k} = (1-1)^n$$

$$\Rightarrow 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\sum_{k=0}^{n-1}U_k + x^{2n}\right) = 1 + 0 = 1$$

Und damit sind wir auch schon fertig und haben die 1 als Resultat bestätigt.

Damit haben wir erst einmal genug vom Cauchy-Produkt gesehen.