mathematikwelt.com
by Matthias Rehder

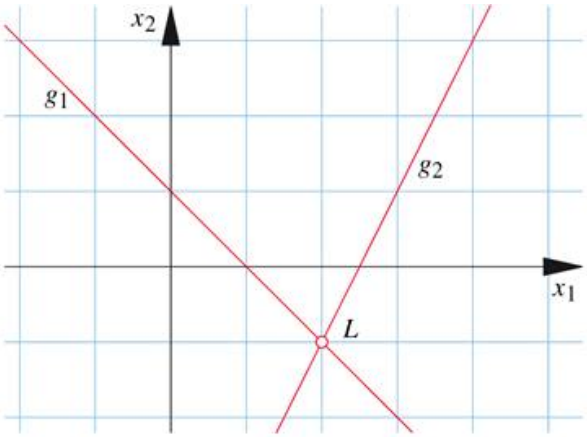
Lösungen zum 5. Aufgabenblatt

Die Lösungen wurden erstellt von: Isabel Voigt, Vanessa Lamm und Matthias Rehder

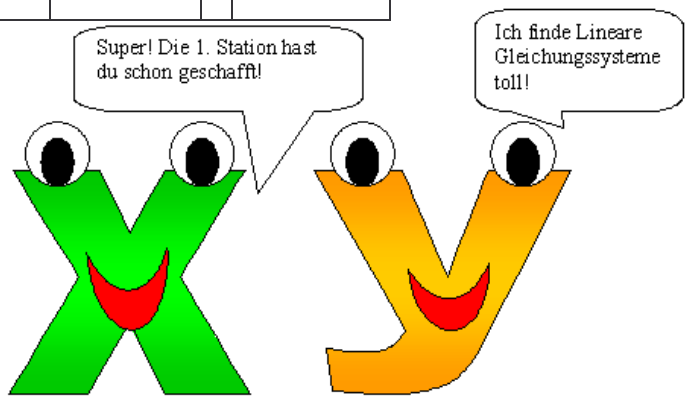
Hinweis: Eine Liste der zur Bearbeitung verwendeten Literatur ist unter www.mathematiwelt.com aufrufbar. Insgesamt 1476 Wörter

Aufgaben Nr.	Ü1	Ü2	Ü3	Ü4		∑
Erreichte Punkte:						

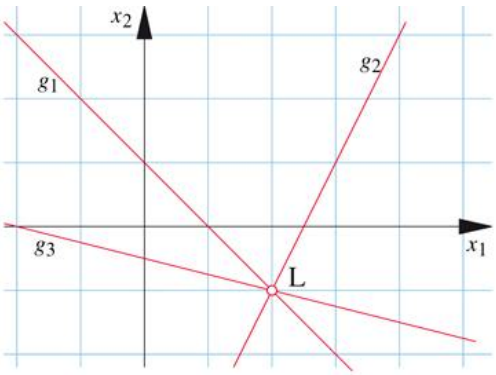
Jeder Lösung eines Systems linearer Gleichungen in zwei bzw. drei Unbekannten entspricht somit ein gemeinsamer Punkt aller zugehörigen Geraden bzw. Ebenen.



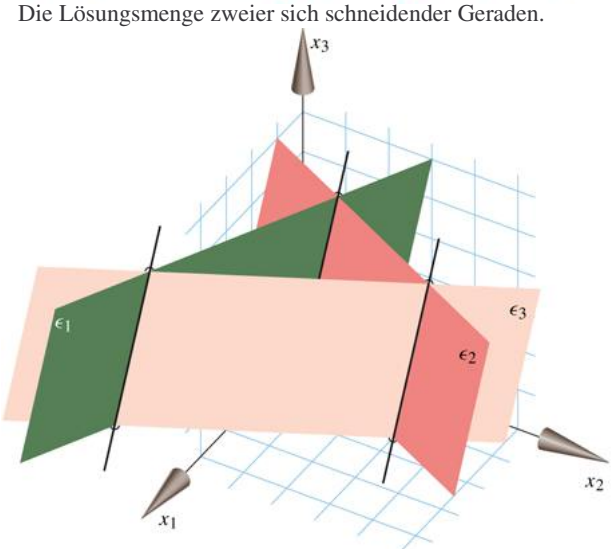
Die Lösungsmenge zweier sich schneidender Geraden.



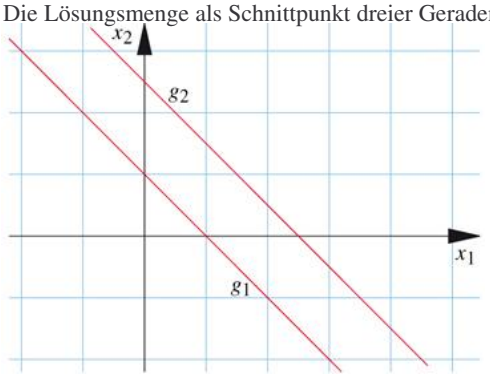
http://wikis.zum.de/dmuw/images/b/b5/Motivation_Hatos_2.PNG



Die Lösungsmenge als Schnittpunkt dreier Geraden



Die Lösungsmenge ist leer; die Schnittgeraden zwischen je zwei der drei Ebenen $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ sind parallel.



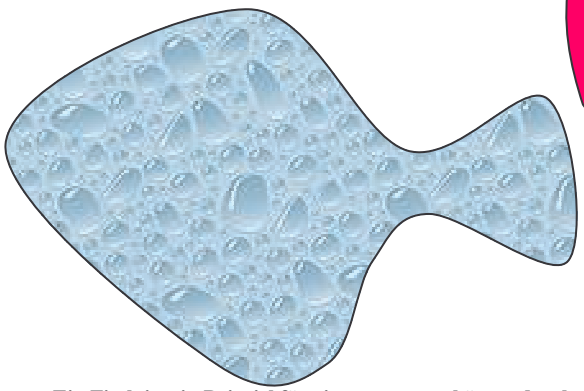
Sind zwei Geraden echt parallel, dann ist die Lösungsmenge leer.

Übersicht:

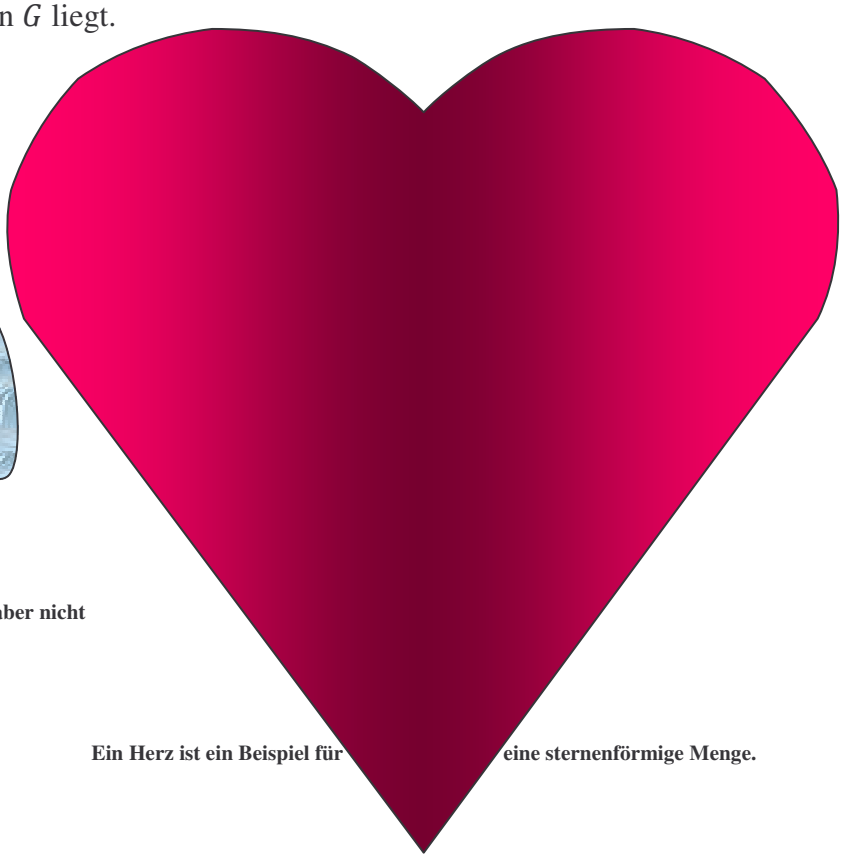
Aufgabe 1: Lineare Gleichungssysteme
Aufgabe 2: Gleichungssysteme über anderen Körpern
Aufgabe 3: Schnittgerade von Ebenen
Aufgabe 4: Lösungen eines Gleichungssystems

Kurzer Exkurs in die Analysis 5 (Funktionentheorie) und Topologie:

Definition: [**Gebiet, bogenzusammenhängend, sternenförmige Menge**]
Sei $G \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge mit der Eigenschaft, dass je zwei Punkte von G durch einen stetigen Weg miteinander verbunden werden können, der vollständig in G liegt, dann heißt G ein **Gebiet**. Eine beliebige Menge $M \subset \mathbb{C}$ heißt (bogen)**zusammenhängend**, falls in M je zwei Punkte durch einen stetigen Weg miteinander verbunden werden können. Sei $G \subset \mathbb{C}$ nun erneut ein Gebiet, dann heißt G **sternenförmig** bezüglich $a \in G$, falls mit jedem $z \in G$ auch die Verbindungsstrecke von a und z ganz in G liegt.



Ein Fisch ist ein Beispiel für eine zusammenhängende, aber nicht sternenförmige Menge



Ein Herz ist ein Beispiel für eine sternenförmige Menge.

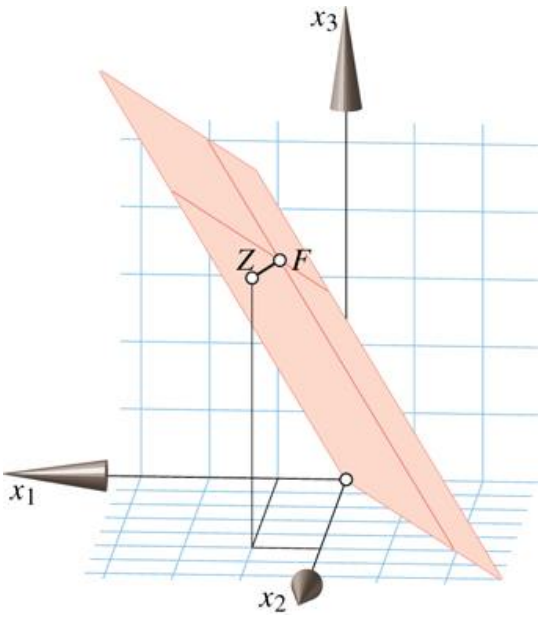
Exkurs 2: Näherungslösung für ein nicht lösbares lineares Gleichungssystem

Die Lösungsmenge des folgenden linearen GLS ist leer.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 &= 5 \\ 3x_1 + x_2 &= 4 \end{aligned}$$

Als Extraaufgabe können Sie dies leicht überprüfen. ☺

Angenommen die Absolutwerte auf der rechten Seite seien nun Resultate von Messungen und daher fehlerbehaftet. Dann könnte man aus dem Blickpunkt des Anwenders fragen: Wenn es keine exakte Lösung gibt, dann gibt es vielleicht eine, welche alle Gleichungen wenigstens annähernd erfüllt? Gibt es eine, bei der die Abweichungen von den auf der rechten Seite vorgegebenen Absolutwerten insgesamt minimal sind? Dass sich eine Minimalitätsforderung mathematisch sinnvoll formulieren lässt, lernt man im höheren Mathematikstudium. Um zu einer Näherungslösung zu gelangen, kann man eine geometrische Interpretation für das Lösen von Gleichungssystemen wählen. Nebenstehende Graphik verdeutlich unser Näherungslösungs-verfahren.



Der Fußpunkt F als Näherung für den Zielpunkt Z.

Aufgabe 1:

Teil a:

In einem Stall leben (unversehrte) Schweine und Hühner. Die Tiere haben insgesamt 30 Augen und 44 Beine. Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf und ermitteln Sie, wie viele Schweine und wie viele Hühner in dem Stall sind.

Sei hierzu x die Anzahl an Schweinen und y die Anzahl an Hühnern:

I. $4x + 2y = 44$

II. $2x + 2y = 30 \mid : 2$

$x + y = 15$

$x = 15 - y$

Der Ausdruck $x = 15 - y$ wird in Gleichung I eingesetzt.

$4(15 - y) + 2y = 44$

$60 - 4y + 2 = 44$

$-2y = -16 \quad \Rightarrow \quad y = 8$

Mit der Lösung $y = 8$ erhalten wir $x = 7$.

Wir haben also 8 Hühner und 7 Schweine im Stall.

Teil b:

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 9 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -3 \\ -14 \end{pmatrix}$$

Mit dem Gauß Algorithmus erhalten wir:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 7 & 2 & -8 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 7 & 9 & 2 & -14 \end{array}\right)$$ // erste Zeile wird durch 3 dividiert, um das Diagonalelement 1 zu erhalten

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{7}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{8}{3} \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 7 & 9 & 2 & -14 \end{array}\right)$$ // Zur zweiten Zeile wird das -2 fache der ersten Zeile addiert

Mit der 1. Zeile bringen wir nun alle anderen Zeilen in der 1. Spalte auf 0

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{7}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{8}{3} \\ 0 & -\frac{11}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{7}{3} \\ 7 & 9 & 2 & -14 \end{array}\right)$$ // Zur dritten Zeile wird -7 fache der ersten Zeile addiert

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{7}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{8}{3} \\ 0 & -\frac{11}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & -\frac{22}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{14}{3} \end{array}\right.$$

// Mit Multiplikation der zweiten Zeile mit $-\frac{3}{11}$ wird das Diagonalelement zu 1 gemacht.

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{7}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{8}{3} \\ 0 & 1 & \frac{4}{11} & -\frac{7}{11} \\ 0 & -\frac{22}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{14}{3} \end{array}\right.$$

// Wir addieren nun zur ersten Zeile das $-\frac{7}{3}$ Fache der zweiten Zeile.

Mit der zweiten Zeile wollen wir nun alle anderen Zeilen in der zweiten Spalte auf 0 bringen.

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{11} & -\frac{13}{11} \\ 0 & 1 & \frac{4}{11} & -\frac{7}{11} \\ 0 & -\frac{22}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{14}{3} \end{array}\right.$$

// Wir addieren nun zur 3. Zeile das $\frac{22}{3}$ Fache der zweiten Zeile.

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{11} & -\frac{13}{11} \\ 0 & 1 & \frac{4}{11} & -\frac{7}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right.$$

Weil alle Koeffizienten in der dritten Zeile 0 sind, ist das LGS nicht eindeutig lösbar. Nach der letzten Zeile gibt es unendlich viele Lösungen.

Insgesamt erhalten wir die folgenden Lösungen:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{13}{11} \\ \frac{7}{11} \\ 0 \end{pmatrix} + \pi \cdot \begin{pmatrix} +\frac{2}{11} \\ -\frac{4}{11} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{mit } \pi \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 2:

*	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	b	1
b	0	b	1	a

+	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	b	a
a	a	b	0	1
b	b	a	1	0

Konvention: Falls kein Optionszeichen dasteht, meinen wir immer *.

Zuerst schreiben wir einmal die Gleichungen heraus:

I. $x_2 + ax_3 = b$
II. $ax_1 + ax_2 = 0$
III. $bx_1 + x_3 = a \quad | * a$

Wir multiplizieren die dritte Gleichung mit dem Faktor a, dann steht da:

III: $abx_1 + ax_3 = aa$

$\Leftrightarrow \quad x_1 + ax_3 = b \quad (1)$

Die erste Gleichung setzen wir nun mit der dritten Gleichung (hier: (1)) gleich. Die zweie Gleichung bleibt unverändert stehen.

I. $x_2 + ax_3 = x_1 + ax_3 \quad | * b$
II. $ax_1 + ax_2 = 0$

Es resultiert dann:

I. $bx_2 + bax_3 = bx_1 + bax_3$

$\Leftrightarrow \quad bx_2 + x_3 = bx_1 + x_3$

II. $ax_1 + ax_2 = 0 \quad | \cdot b$

Die dritte Gleichung wird ebenfalls mit dem Faktor b multipliziert. Wir erhalten:

II. $bax_1 + bax_2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x_1 + x_2 = 0$

Wir haben also nur noch die zwei Gleichungen:

I. $bx_2 + x_3 = bx_1 + x_3 \quad | * b$ und II. $x_1 + x_2 = 0$

Zu Gleichung I multiplizieren wir nun nochmal einen Faktor b

I. $ax_2 + bx_3 = ax_1 + bx_3$

Nun addieren wir auf beiden Seiten den Summanden bx_3.

I. $ax_2 + bx_3 + bx_3 = ax_1 + bx_3 + bx_3$

Weil wir einen Körper zugrunde liegen haben, wenden wir jetzt das Distributivgesetz an.

I. $ax_2 + x_3(b + b) = ax_1 + x_3(b + b)$

Nach unsrer Verknüpfungstabelle wissen wir, dass $b + b = 0$, demnach ist einer unserer Faktoren Null und damit dann auch nach Verknüpfungstabelle unser ganzes Produkt gleich Null.

Wir haben also:

I. $ax_2 = ax_1 \mid \cdot b$

Jetzt lohnt sich natürlich noch eine Multiplikation mit dem Faktor b.

I. $bax_2 = bax_1$
$\Leftrightarrow x_2 = x_1$

Mit letzterer Gleichheit gehen wir nun in Gleichung I:

II $x_1 + x_2 = 0$

II. $x_1 + x_1 = 0$

Die Addition zweier Elemente über unserem Körper ist genau dann Null, wenn:

$x_1 = 0$ oder $x_1 = 1$ oder $x_1 = a$ oder $x_1 = b$

Mit $x_2 = x_1$ als äquivalente Umformung aus I resultiert dann:

$x_2 = 0$ oder $x_2 = 1$ oder $x_2 = a$ oder $x_2 = b$

Verwenden wir I aus unser Anfangsgleichung als Bestimmungsgleichung, so erhalten wir für x_3 mit der Gleichheit $x_2 + ax_3 = b$ folgendes:

Falls $x_2 = 0$: $0 + ax_3 = b \Leftrightarrow bax_3 = bb \Rightarrow \boldsymbol{x_3 = a}$

Falls $x_2 = 1$: $1 + ax_3 = b \Leftrightarrow bax_3 = bb + b1 \Rightarrow \boldsymbol{x_3 = a + b}$

Falls $x_2 = a$: $a + ax_3 = b \Leftrightarrow bax_3 = bb + ba \quad \boldsymbol{x_3 = a}$

Falls $x_2 = b$: $b + ax_3 = b \Leftrightarrow bax_3 = b + b = 0 \Rightarrow \quad \boldsymbol{x_3 = 0}$

Was heißt es, wenn die Determinante einer Matrix ungleich 0 ist?

Sei hier A eine $n \times n$ Matrix. Sei außerdem $\det A = |A| \neq 0$, dann gilt:

- $\operatorname{rang}(A) = n$
- A ist regulär
- Die Inverse A^{-1} existiert
- Das GLS $Ax = b$ ist eindeutig lösbar (insofern es einwandfrei definiert ist)
- Die Zeilen und Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig
- Das homogene GLS $Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung $x = 0$.

Aufgabe 3:

Wir betrachten nun die beiden folgenden Ebenen ε_1 und ε_2 mit den Gleichungen:

$$\varepsilon_1: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Und

$$\varepsilon_2: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Wenn beide Ebenen gemeinsame Punkte haben, dann muss es reelle Zahlen a_1, b_1 und a_2, b_2 geben, sodass gilt:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + b_1 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad | \quad - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dies schreiben wir erst einmal ein bisschen um, dann stehet da:

$$a_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + b_1 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad | \quad - a_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} - b_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$a_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + b_1 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - a_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} - b_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ein Koordinatenvergleich führt zu den folgenden vier Gleichungen.

$1 = -2a_1 - 2b_1 + 3a_2 - b_2$
$-4 = 2a_1 - b_1 - 4a_2$
$1 = -a_1 + 2b_1 + a_2 - b_2$

Um den Gauß'schen Algorithmus zum Lösen des obigen Gleichungssystems anwenden zu können, nehmen wir uns o. B. d. A. die vierte Gleichung $b_2 = t$ mit $t \in \mathbb{R}$ zur Hilfe. Dann machen wir uns ans Lösen:

a_1	b_1	a_2	b_2		Const.	
-2	-2	3	-1		1	Optionsprotokoll:
2	-1	-4	0		-4	
-1	2	1	-1		1	$\cdot 2$
0	0	0	1		t	
-2	-2	3	-1		1	
2	-1	-4	0		-4	III + II
-2	4	2	-2		2	
0	0	0	1		t	
-2	-2	3	-1		1	
2	-1	-4	0		-4	
0	3	-2	-2		-2	II + I
0	0	0	1		t	
-2	-2	3	-1		1	
0	-3	-1	-1		-3	III + II
0	3	-2	-2		-2	
0	0	0	1		t	
-2	-2	3	-1		1	
0	-3	-1	-1		-3	
0	0	-3	-3		-5	Fertig, da nur Nullen unterhalb der
0	0	0	1		t	Diagonale. ♥

Wir erhalten letztendlich folgendes Resultat (durch Ablesen aus der letzten Koeffizientenmatrix):

$b_2 = t \qquad a_2 = \frac{5}{3} - t \qquad b_1 = \frac{8}{18} = \frac{4}{9} \qquad a_1 = \frac{14}{9} - 2t$

Setzen wir die Lösungen in beide Ebenengleichungen ein, so erhalten beides Mal dieselbe Schnittgerade, also muss unser Resultat stimmen (Probe: ♥♥)

$$\vec{j} = \begin{pmatrix} -4 \\ \frac{17}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ mit } e \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 4:

Wir suchen hier $b \in \mathbb{R}^3$ mit $b \coloneqq (b_1, b_2, b_3)$, welche das folgende Gleichungssystem nicht löst. Dazu suchen wir erst einmal $b \in \mathbb{R}^3$, damit das folgende Gleichungssystem konsistent ist. $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ und $A \coloneqq \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\varepsilon_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} x_2$$

Wir formen nun die erweiterte Matrix

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & b_1 \\ 1 & 2 & b_2 \\ 1 & 1 & b_3 \end{bmatrix}$$

in ein bekanntes Gleichungssystem um:

1) $b_1 = 2x_1 + 3x_2$
2) $b_2 = x_1 + 2x_2$
3) $b_3 = x_1 - x_2 \quad | - x_2$
   $x_1 = b_3 - x_2$ // dies setzen wir nun in Gleichung 1 und 2 ein, dann erhalten wir:

4) $b_1 = 2(b_3 - x_2) + 3x_2$
   $b_1 = 2b_3 - 2x_2 + 3x_2$
   $b_1 = 2b_3 + x_2 \ | - 2b_3$
   $b_1 - 2b_3 = (x_2)$

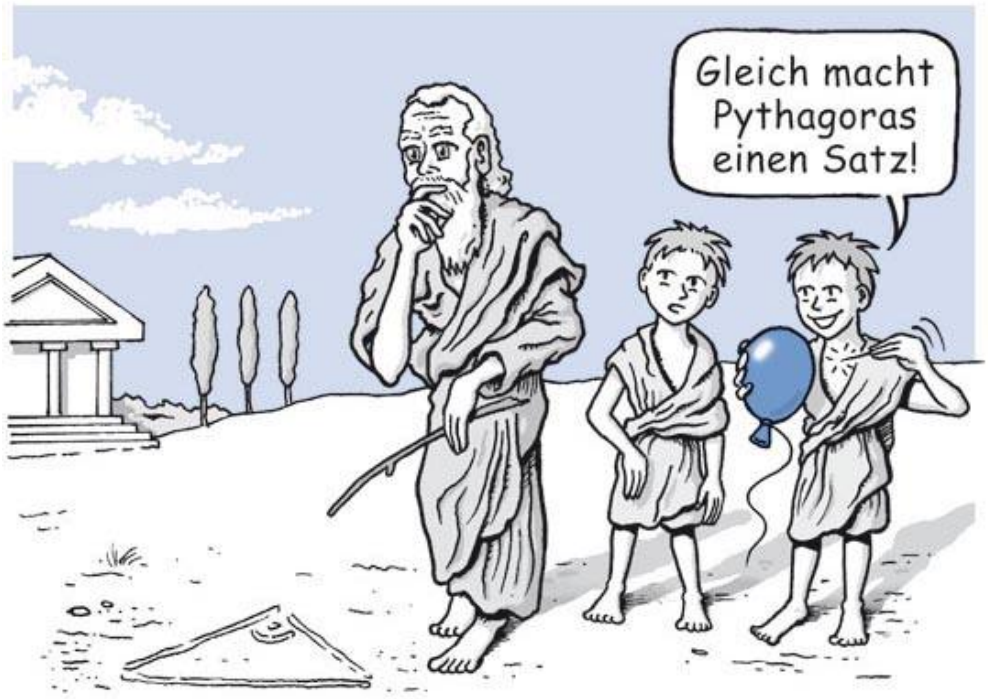
5) $b_2 = (b_3 - x_2) + 2x_2$
   $b_2 = b_3 + x_2 \ | - b_3$ =
   $b_2 - b_3 = (x_2)$

Wir können nun leicht ablesen, dass unser Gleichungssystem genau dann eine Lösung hat, wenn b_1, b_2 und b_3 die Bedingung $b_2 - b_3 = b_1 - 2b_3 \quad \Leftrightarrow \ b_1 - b_2 - b_3 = 0$ (NB) $\Leftrightarrow \ b_1 = b_2 + b_3$. Mit anderen Worten: $Ax = b$ ist genau dann konsistent, wenn b die Gestalt

$$b = \begin{bmatrix} b_2 + b_3 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Fazit: Jedes $b \in \mathbb{R}^3$, welches die Bedingung $b_1 - b_2 - b_3 \neq 0 \Leftrightarrow b_1 \neq b_2 + b_3$ erfüllt, ist dann unser Gleichungssystem nicht lösbar. Wir erhalten also damit:

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \neq b_2 + b_3 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Mit b ist das Gleichungssystem nicht lösbar.

http://www.henning-schoettke.de/images/g_comic/s_school/mentor/picB2-1-2-1.jpg