Übungszettel 7 – Basiswechsel und affine Koordinaten

Aufgabe 1

$$f(v) = 3v + (w^T v)\, w$$

1.) Bilder der kan. Basisvektoren bestimmen. (spaltenweise eintragen):

$$f(e_i) = 3e_i + (w^T e_i)\, w$$
$$= 3e_i + \left(\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{i-te Zeile} \right) w$$

$$= 3e_i + w_i w \qquad \forall i = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow \quad A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 3+w_1^2 & \cdots & w_3 w_1 & \cdots & w_n \cdot w_1 \\ w_1 w_3 & \ddots & w_3 w_2 & & w_n \cdot w_2 \\ w_1 w_3 & & 3+w_3^2 & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ w_1 w_n & \cdots & w_3 w_n & \cdots & 3+w_n^2 \end{pmatrix}_{\text{kan.B.}}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{a_{ii} = 3 + w_i^2}}$$
$$\underline{\underline{a_{ij} = w_i \cdot w_j}}$$

2.) w als erstes Basiselement, 2 orthogonale Vektoren $\{v_1^\perp, v_2^\perp\}$

$$f(w) = 3w + (w^T w)\, w$$
$$= 3w + \|w\|\, w$$
$$= 3w + w$$
$$= 4w$$

$$f(v_i^\perp) = 3v_i^\perp + (\underbrace{w^T v_i^\perp}_{=\,0})\, w$$
$$= 3v_i^\perp \qquad , i = 1,2$$

$$\Rightarrow \quad A' = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{B_w = \{w, v_1^\perp, v_2^\perp\}}}$$

$$f(w) = A' \cdot w = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{B_w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 4w$$

$$f(v_1^\perp) = A' \cdot v_1^\perp = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{B_w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 3v_1^\perp$$

$$f(v_2^\perp) = A' \cdot v_2^\perp = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{B_w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3v_2^\perp$$

Aufgabe 2

$v_1 = (1,-1,-5)_E$
$v_2 = (2,2,-2)_E$
$v_3 = (0,1,2)_E$

v_1, v_2 und v_3 sind linear abhängig: $v_3 = -\frac{1}{2} v_1 + \frac{1}{4} v_2$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{B = \{v_1, v_2, w\}}}$, w orthogonal zu v_1 und v_2 (d.h. Skalarprodukt $= 0$)

$v_{11} \cdot w_1 + v_{12} \cdot w_2 + v_{13} \cdot w_3 = 0$
$v_{21} \cdot w_1 + v_{22} \cdot w_2 + v_{23} \cdot w_3 = 0$

$\Rightarrow$
I $\quad w_1 - w_2 - 5w_3 = 0$
II $\quad 2w_1 + 2w_2 - 2w_3 = 0$

Sei $\underline{w_1 = 1} \Rightarrow w_2 = 1 - 5w_3 \quad (I^*)$

$II^* \quad 2 \cdot 1 + 2(1 - 5w_3) - 2w_3 = 0$
$\Leftrightarrow \quad 2 + 2 - 10w_3 - 2w_3 = 0$
$\Leftrightarrow \quad -12w_3 = -4$
$\Leftrightarrow \quad \underline{w_3 = \frac{1}{3}}$

$I^{**} \quad w_2 = 1 - 5 \cdot \frac{1}{3}$
$\Leftrightarrow \quad \underline{w_2 = -\frac{2}{3}}$

$\Rightarrow$
$w = (1, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$

$v_1 \underset{E}{\Leftrightarrow} (1,-1,-5) \Leftrightarrow v_1 = e_1 - e_2 - 5e_3$

$v_1 \underset{B}{\Leftrightarrow} (\alpha_1, \alpha_2, 0) \Leftrightarrow v_1 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + 0 \cdot w$

$\Leftrightarrow \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0 \Rightarrow v_1 \underset{B}{\Leftrightarrow} (1,0,0)$

$\Rightarrow v_2 \underset{B}{\Leftrightarrow} (0,1,0)$

$v_3 \underset{E}{\Leftrightarrow} (0,1,2) \Leftrightarrow v_3 = e_2 + 2e_3$

$v_3 \underset{B}{\Leftrightarrow} (\alpha_1, \alpha_2, 0) \Leftrightarrow v_3 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$

$\Leftrightarrow \alpha_1 = -\frac{1}{2}, \alpha_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow v_3 \underset{B}{\Leftrightarrow} (-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0)$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -\frac{2}{3} \\ -5 & -2 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}}}$ wandelt v_i_neu in v_i_alt um, $M^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{28} & -\frac{1}{7} & -\frac{5}{28} \\ \frac{11}{56} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{56} \\ \frac{9}{14} & -\frac{3}{7} & \frac{3}{14} \end{pmatrix}$ wandelt v_i_alt in v_i_neu um

Geometrische Interpretation: v_1 und v_2 spannen eine Ebene in $\mathbb{R}^3$ auf, w ist der zugehörige Normalenvektor

Aufgabe 3a

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \underline{\underline{\dim U = 2}}$$

sei $x_1 = 1 \Rightarrow x_3 = -\frac{2}{3}$ aus 1. Gleichung

$x_2 = -\frac{2}{3} - 2x_4$, sei $x_4 = 0$ aus 2. Gleichung

$\Rightarrow x_2 = -\frac{2}{3}$

$\underline{\underline{v_1 = (1, -\tfrac{2}{3}, -\tfrac{2}{3}, 0)}}$ ist ein Basisvektor

Sei $x_1 = 0, x_4 = 1$

$\Rightarrow 2 \cdot 0 + 3 \cdot x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0$ aus 1. Gleichung

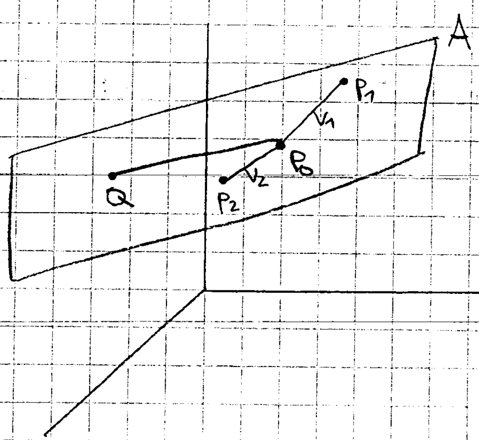
$\cancel{0 \cdot 0} + \cancel{1} \cdot x_2 - \cancel{1} \cdot 0 + 2 = 0 \Rightarrow x_2 = -2$ aus 2. Gleichung

$\underline{\underline{v_2 = (0, -2, 0, 1)}}$ ist ein zweiter Basisvektor

$\underline{\underline{B = \{v_1, v_2\}}}$

$A = (-1, 0, 0, 1) + U$

affine Basis $\{P_0, P_1, P_2\}$ von A: $P_0 = (-1, 0, 0, 1)$
$P_1 = P_0 + v_1 = (0, -\tfrac{2}{3}, -\tfrac{2}{3}, 1)$
$P_2 = P_0 + v_2 = (-1, -2, 0, 2)$



$P_0, P_1, P_2 \in A$

$v_1 = \overline{P_0P_1}$
$v_2 = \overline{P_0P_2}$

$$\overline{P_0Q} = \mu_1 \overline{P_0P_1} + \mu_2 \overline{P_0P_2} = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2$$

$$\Leftrightarrow \overline{P_0Q} = Q - P_0 = (\tfrac{1}{2}, -5, -1, 3) - (-1, 0, 0, 1) = \mu_1 \cdot (1, -\tfrac{2}{3}, -\tfrac{2}{3}, 0) + \mu_2 \cdot (0, -2, 0, 1)$$

$$\Leftrightarrow (\tfrac{3}{2}, -5, -1, 2) = \mu_1 (1, -\tfrac{2}{3}, -\tfrac{2}{3}, 0) + \mu_2 \cdot (0, -2, 0, 1)$$

$\mu_1 = \frac{3}{2}$
$\mu_2 = 2$

$\Rightarrow \lambda_0 = 1 - \mu_1 - \mu_2 = -\frac{5}{2}$

$\lambda_1 = \mu_1 = \frac{3}{2}$, $\lambda_2 = \mu_2 = 2$

$\rightarrow Q = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = (\tfrac{1}{2}, -5, -1, 3)$

$\underline{\underline{Q = (-\tfrac{5}{2}, \tfrac{3}{2}, 2)}}$ affine baryz. Koord.

Projektion auf die Ebene $\mathbb{R}^2$: $F(P_0) = (-1,0,0,0)$, $F(P_1) = (0,-2/3,0,0)$,
$F(P_2) = (-1,-2,0,0)$

Aufgabe 3b

$P_1 = (1,2,0)$
$P_2 = (1,1,1)$
$P_3 = (2,1,-1)$

$A = P_0 + U$

$P_0 = P_1$, $v_1 = P_2 - P_1 = (0,-1,1)$ } linear unabhängig
$v_2 = P_3 - P_1 = (1,-1,-1)$ } $\Rightarrow$ bilden Unterraum U der Dimension 2

$\Rightarrow$
$P_1, P_2, P_3 \in A = P_1 + U$

Die affinen Koordinaten des Mittelpunktes eines Verbindungsvektors $\overline{PQ}$ sind immer $(1/2, 1/2)$ (siehe VL).

$\Rightarrow$

Für jede Seite folgt: $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$.
$(\sum \lambda_i = 1)$

Projektion auf die Ebene $\mathbb{R}^2$: $F(P_1) = (1,2,0)$,
$F(P_2) = (1,1,0)$,
$F(P_3) = (2,1,0)$

Die Abbildung F ist nicht injektiv, da z.B. $F(p) = (1,2,0)$
$\Rightarrow p = (1,2,1)$ oder $p = (1,2,7)$ oder ...

Die Abbildung F ist auch nicht surjektiv, da nicht der ganze $\mathbb{R}^2$ getroffen wird. Es gibt Punkte, die außerhalb des Dreiecks liegen.

$\Rightarrow$
Die Abbildung ist somit auch nicht bijektiv.

Aufgabe 4

$f_p(x) = p(x+1) - p(x)$

1.) Linearität: z.z.: $f_{p+q}(x) = f_p(x) + f_q(x)$
$f_p(c\cdot x) = c\cdot f_p(x)$

$$f_{p+q}(x) = (p+q)(x+1) - (p+q)(x)$$
$$= p(x+1) + q(x+1) - p(x) - q(x)$$
$$= f_p(x) + f_q(x)$$

$$f_p(c\cdot x) = p(c(x+1)) - p(c\cdot x)$$
$$= c\cdot p(x+1) - c\cdot p(x)$$
$$= c\,(p(x+1) - p(x))$$
$$= c\cdot f_p(x)$$

$\Rightarrow$ Abb. ist linear.

$\mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow p(x+1) - p(x) = 0 \Leftrightarrow p(x+1) = p(x)$
$\Leftrightarrow p$ konstant

2.) $M = \{1, x, x^2\}$

Um die Matrix A_M zu bestimmen, kann man die Polynome $f_{p_i}(x)$ für $p_i = 1, x, x^2$ berechnen:

$$f_{p_0}(1) = 1 - 1 = 0, \ \forall x$$
$$f_{p_1}(x) = x + 1 - x = 1, \ \forall x$$
$$f_{p_2}(x^2) = (x+1)^2 - x^2 = x^2 + 1 + 2x - x^2 = 1 + 2x$$

$\Rightarrow$

$$A_M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$A_M \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$A_M \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T_{N\to M} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_{M\to N} = (T_{N\to M})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & -11/3 \\ 0 & 1/3 & -5/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_N = T_{M\to N} A_M T_{N\to M} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 20/3 \\ 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rg}(A_N) = \mathrm{rg}(A_M) = 2$