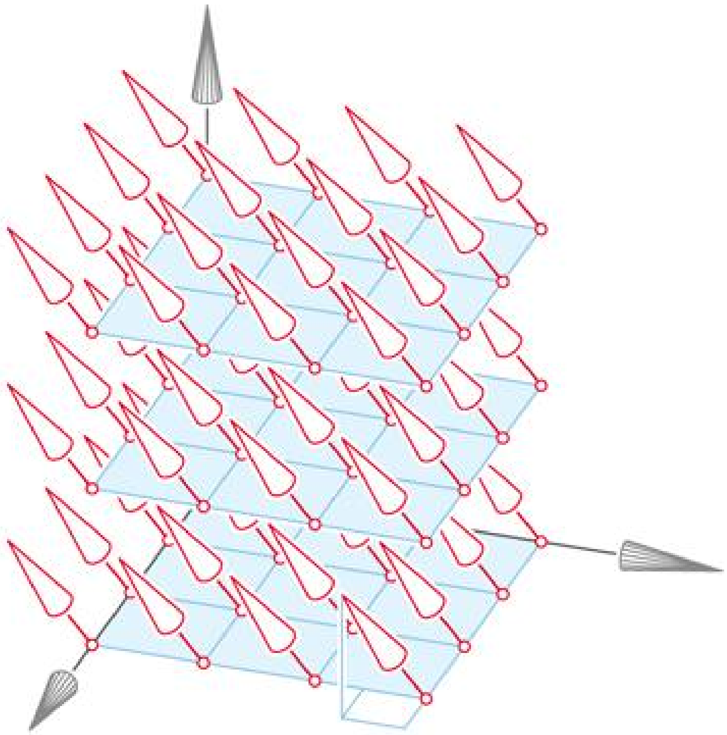
Lösungen zum 8. Aufgabenblatt

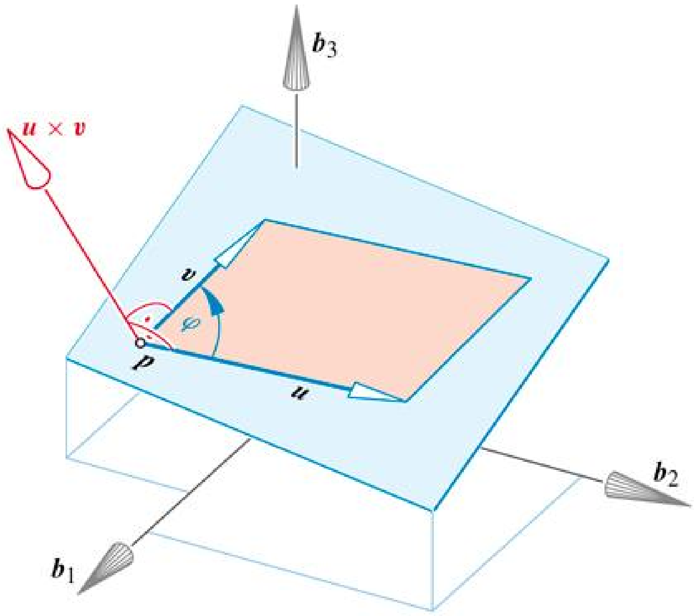
Die Lösungen wurden erstellt von: Isabel Voigt, Vanessa Lamm und Matthias Rehder

Hinweis: Eine Liste der zur Bearbeitung verwendeten Literatur ist unter www.mathematiwelt.com aufrufbar. Insgesamt 1849 Wörter

Aufgaben Nr.	Ü1	Ü2	Ü3	Ü4		$\sum$
Erreichte Punkte:						



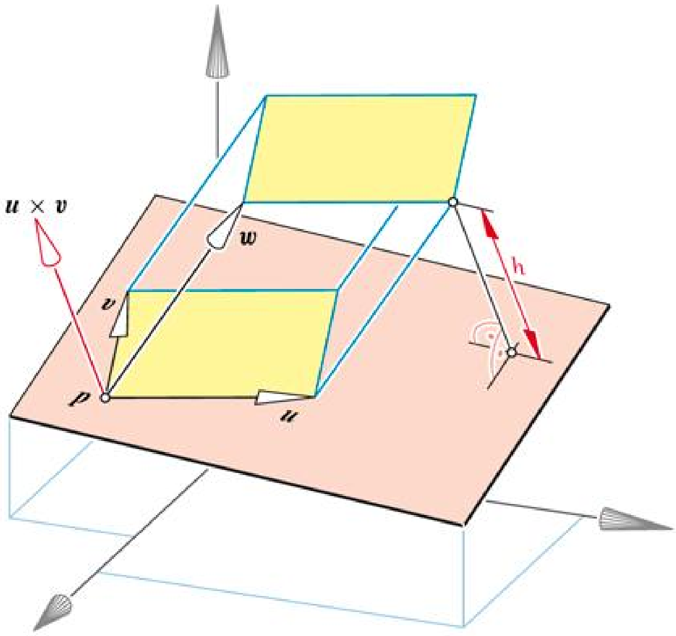
Eine Äquivalenzklasse gleich langer und gleich orientierter Pfeile ist ein Vektor



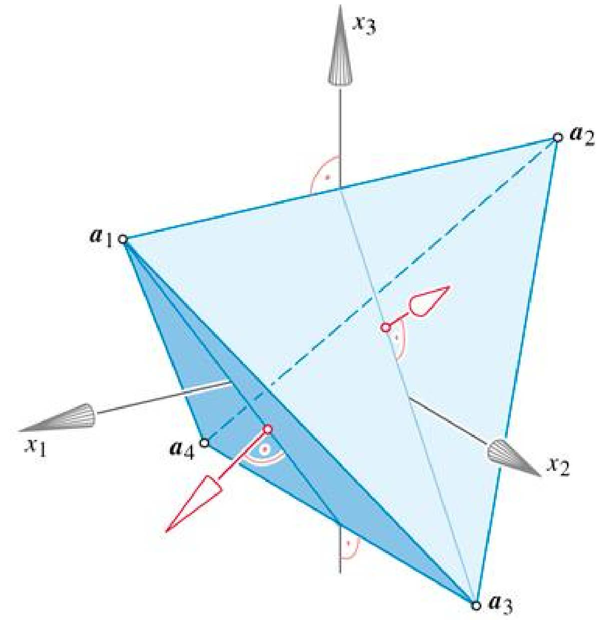
Die geometrische Bedeutung des Vektorprodukts $u \times v$

Übersicht:

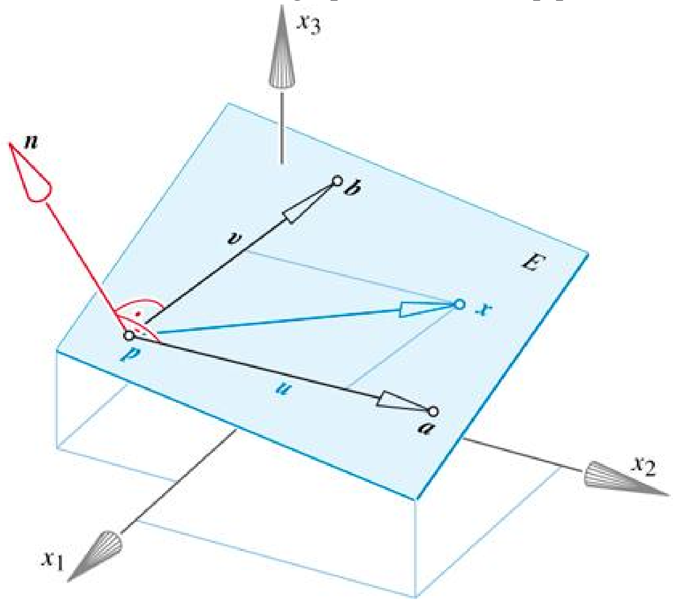
Aufgabe 1: Spatprodukt, Ebenengleichung, Normalen
Aufgabe 2: Basistransformation, affine Unterräume
Aufgabe 3: Determinanten
Aufgabe 4: Äquivalenzrelationen



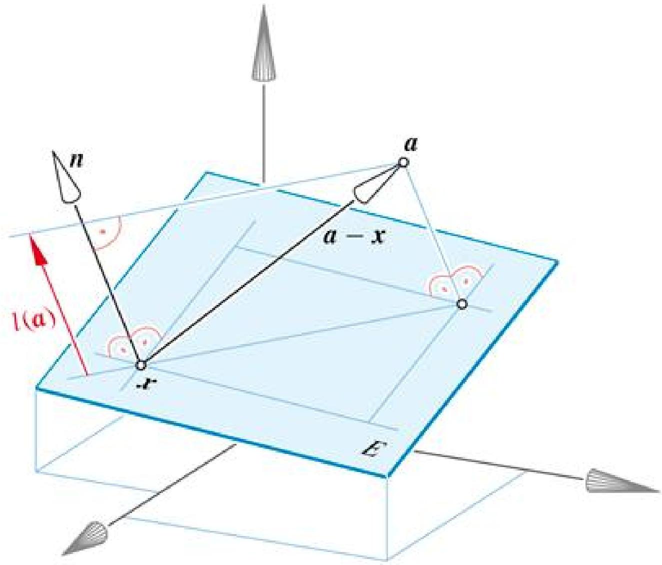
Das Spatprodukt $\det(u, v, w)$ gibt das Volumen des von u, v und w aufgespannten Parallelepipeds an.



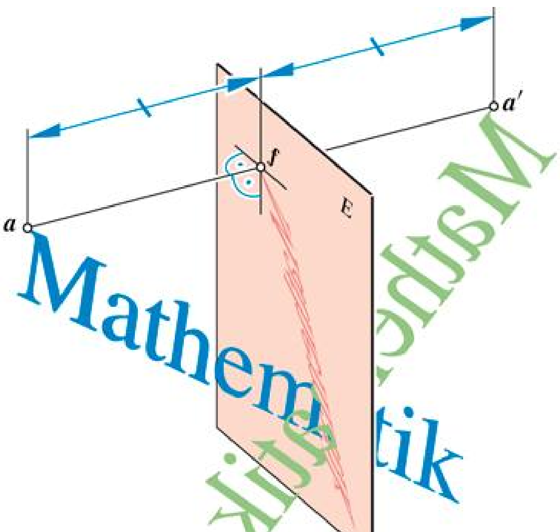
Die Punkte $a_1, \dots, a_n$ bilden ein reguläres Tetraeder



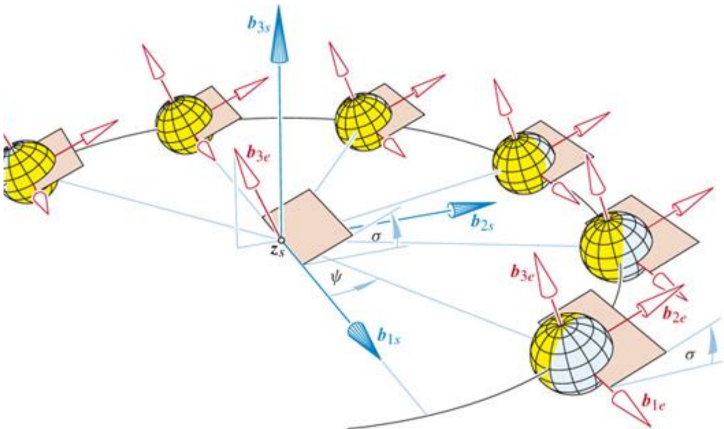
Die Ebene $E = p + \mathbb{R}u + \mathbb{R}v$ geht durch p und wird von den Vektoren u und v aufgespannt.



Die Bedeutung der Hesse'schen Normalform: $d = l(a)$ ist der orientierte Abstand des Punktes a von der Ebene E. Hierbei kann d positiv, negativ oder gleich null sein.



Der Normalenfußpunkt f von a in der Ebene E sowie das |dargestellt Spiegelbild a' von a. Auch der blaue Schriftzug wurde an E gespiegelt (grün), sowie normal in die Ebene E projiziert (rot).



Das von der Erdrotation „befreite" geozentrische Koordinatensystem (z_s, B_l)und das heliozentrische System (z_s, B_s). Die Erde ist rund 2 500-fach vergrößert

Vorbemerkungen, Ergänzungen:

Definition: [Kreuzprodukt]

Das Kreuzprodukt (oder Vektorprodukt) $X \times Y$ von zwei Vektoren X, Y im $\mathbb{R}^3$ definiert.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften:

(i) Es gilt $X \times Y = 0$ genau dann, wenn X und Y linear abhängig sind.

(ii) $X \times Y$ steht senkrecht auf X und Y.

(iii) Die Länge von $X \times Y$ ist gleich dem Flächeninhalt des von X und Y aufgespannten Parallelogramms, also

$$\|X \times Y\| = \|X\|\|Y\| \sin \sphericalangle (X, Y)$$

(iv) Die Vektoren $X, Y, X \times Y$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.

Definition: [Spatprodukt]

Seien $u, v, w \in \mathbb{R}^3$. Weil $u \times v$ ein Vektor ist, kann man dessen Skalarprodukt mit einem dritten Vektor w betrachten. Man erhält so das Spatprodukt $(u \times v) \cdot w$. Hierbei handelt es sich um eine Determinante:

$$(u \times v) \cdot w = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Wir können w dabei in die obere oder die untere Zeile schreiben --- die Determinanten sind gleich, weil ____ Vertauschungen nötig sind, um von der einen zur anderen zu gelangen. Wichtig ist die Betrachtung, wann die Determinante gleich Null ist.

$(u \times v) \cdot w = 0 \quad \Leftrightarrow$ die Vektoren u, v, w liegen in derselben Ebene

Begründung:

1. Die Determinante steht für das Volumen, welches Null sein muss, wenn der durch u, v und w aufgespannte Kasten sich in Ebene befindet.
2. $u \times v$ steht senkrecht auf der Ebene, sodass das Skalarprodukt mit w ergibt.
3. Die Vektoren in einer Ebene sind notwendigerweise linear abhängig. Die Matrix ist also singulär, und die Determinante ist Null.

Definition: [Äquivalenzrelation]

Eine Relation R auf A, also $R \subset A \times A$ heißt
Reflexiv $\Leftrightarrow$ für alle $x \in A$ gilt $(x, x) \in R$
Symmetrisch $\Leftrightarrow (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$ für alle $x, y \in A$
Transitiv $\Leftrightarrow (x, y) \in R$ und $(y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$ für alle $x, y, z \in A$
Äquivalenzrelation $\Leftrightarrow$ R ist reflexiv, symmetrisch und transitiv.

Definition: [Äquivalenzklasse]

Es sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A. Die Teilmengen

$$a/_{\sim} := \{b \in A \mid b \sim a\} \quad (a \in A)$$

von A heißen Äquivalenzklassen von $\sim$.

Die Menge aller Äquivalenzrelationen nennen wir den **Quotientenraum**.

🗁 Beispiel: Die Gleichheitsoption „ = “ ist ein Beispiel für eine Äquivalenzrelation. Z.B. X und Y sind gleich alt. Wird „sind gleich alt“ als Relation aufgefasst, dann kann man leicht alle Eigenschaften einer Äquivalenzrelation nachweisen.

Aufgabe 1:

Für $\alpha \geq 0$ seien die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ \alpha \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$

gegeben.

1. Wir haben das Volumen des Parallelotops (Spat) zu berechnen, das von den drei Vektoren aufgespannt wird.

   Spatprodukt = Determinante = Volumen

   Wir berechnen zuerst $(v_1 \times v_2) \cdot v_3$. Dabei steht $\times$ für das Kreuzprodukt und $\cdot$ für das Skalarprodukt.

   $$v_1 \times v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ \alpha \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} -\alpha \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = -3\alpha + \alpha^2$$

   $$\alpha(-3+\alpha)$$

   Nun überprüfen wir mit der Determinante:

   Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & \alpha & -1 \\ 3 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$

   $$\left|\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & \alpha & -1 \\ 3 & 1 & \alpha \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 0 \\ -1 & \alpha \\ 3 & 1 \end{matrix} = \alpha^2 - 1 + 1 - 3\alpha = \alpha^2 - 3\alpha = \alpha(-3+\alpha)$$

   $$\Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & \alpha & -1 \\ 3 & 1 & \alpha \end{vmatrix} \underbrace{=}_{\text{Sarrus}} \alpha(-3+\alpha)$$

   Damit resultiert $\alpha(-3+\alpha)$ als Spat.

2. Wir verwenden:

   $(v_1 \times v_2) \cdot v_3 = 0 \Leftrightarrow$ die Vektoren u, v, w liegen in derselben Ebene

   $(v_1 \times v_2) \cdot v_3 = \alpha(-3+\alpha) \overset{!}{=} 0 \;\Leftrightarrow$ einer der Faktoren ist 0. $\Leftrightarrow$
   $\alpha = 0$ oder $(-3+\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 3$
   Daraus folgt also: Für $\alpha = 3$ und $\alpha = 0$ liegen die Vektoren auf einer Ebene.

Nun haben wir zu untersuchen, für welchen Wert von α die Vektoren auf einer Geraden liegen. Dazu parametrisieren wir mit zwei Vektoren eine Geradengleichung und machen die Punktprobe, um zu überprüfen, ob der dritte Vektor ebenfalls auf dieser Ebene liegt.

Wir wählen v_1 als Stützvektor und $a = v_2 - v_1$ als Richtungsvektor.

$$a = v_2 - v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ \alpha \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ \alpha \\ -2 \end{pmatrix}$$

Es resultiert die Geradengleichung mit $t \in \mathbb{R}$:

$$g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ \alpha \\ -2 \end{pmatrix}$$

<u>Punktprobe</u>:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ \alpha \\ -2 \end{pmatrix} \quad (*)$$

Und (*) liefert das folgende Gleichungssystem:

$$3 = 1 - 2t$$

$$1 = t\alpha$$

$$\alpha = 1 - 2t$$

Umgeschrieben steht da mit $t \neq 0$:

1) $2 = 0 - 2t$
2) $\alpha = \frac{1}{t}$
3) $1 = \alpha + 2t$

Aus Gleichung 1 erhalten wir, dass $t = -1$. Dies setzen wir nun in 2 und 3 ein. Damit erhalten wir dann:

1) $\alpha = -1$
2) $1 = \alpha - 2 \Leftrightarrow \ \alpha = 3$

Punkt auf der aufgestellten Geradengleichung liegt. Demnach existiert kein α, sodass die Vektoren auf einer Geraden liegen.

3. Wir parametrisieren zuerst die Ebenengleichung und setzen dann $\alpha = 3$.

$$\varepsilon : x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ \alpha \\ -2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \alpha - 1 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon : x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Einen Normalenvektor der beiden Richtungsvektor erhalten wir durch bilden des Kreuzprodukts:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+2 \\ -4+4 \\ -2-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow -8n = -8 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow n = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ein Normalenvektor lautet demnach $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, nun können wir eine

Die Normale ist nun folgende Gerade:

$$\vec{\mu} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \tau \in \mathbb{R}$$

Wichtig ist folgende Kenntnis: Die Normale ist eine Gerade, die senkrecht (orthogonal) zu einem anderen mathematischen Objekt verläuft.

Außerdem könnten wir eine Normalendarstellung der Ebene angeben: Wir brauchen dazu bloß $E : n \cdot (x - a) = 0$ aufstellen, die den Punkt $a = Q = (-1, 3, 4)$ enthält.

$$n \cdot (x - a) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x+1 \\ y-3 \\ z-4 \end{pmatrix}$$

$$= -x - 1 + z - 4 = -x + z - 5$$

Die Normalendarstellung der Ebene ist also durch die Gleichung $E : -x + z - 5 = 0$ gegeben.

Aufgabe 2:

1. Die Matrix der Abbildung f in der Monombasis lautet:
   (Für den Spezialfall: $n = 4$)
$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   Für ein allgemeines n steht dann da die Matrix:
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
   Warum ist das so?
   Die Funktionen sind Vektoren zur Monombasis $M_n = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$.
   Die Vektoren enthalten dabei nur die Koeffizienten der Polynome.
   Nehmen wir zum Beispiel den Vektor $(-1, 9, -7, 4, 0, 0, \dots, 0)$, dann ist die Ableitung eine lineare Abbildung in diesem Vektorraum, welche auch durch eine Matrix darstellbar ist. Wir suchen also eine Matrix, welche aus der Funktion $f(x) = 4x^3 - 7x^2 + 9x - 1$ die Funktion $f'(x) = 12x - 14x + 9$ macht, d. h. die Matrix macht aus dem Vektor $(-1, 9, -7, 4, 0, 0, \dots, 0)$ den Vektor $(9, 2 \cdot (-7), 3 \cdot 4, 4 \cdot 0, 5 \cdot 0, \dots, n \cdot 0) = (9, -14, 12)$.

2. Das System anzugeben, ist sehr leicht, denn wir brauchen bloß unsere gegeben Bedingungen zu verwenden. Dann erhalten wir mit dem Fréchet - Differential $p'(x) = a_1 + 2a_2x$:

   $a_0 + a_1 + a_2 = 1{,}3$
   $a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 2{,}5$
   $a_1 + 2{,}6a_2 = -1$

   Damit haben wir unser LGS. Eine Lösung war aufgrund der Aufgabenstellung nicht erforderlich.

Aufgabe 3:

Seien die folgenden 4×4 Matrizen gegeben. Wir haben dann jeweils die Determinanten zu bestimmen. Dazu verwenden wir den Entwicklungssatz von LAPLACE, denn die Regel von Sarrus ist nur unter der Voraussetzung einer 3×3 Matrix möglich.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Wir brauchen dazu das Sachbrettmuster $\begin{pmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$, wo das Plus immer neben dem Minuszeichen steht und berechnen mit Abdecken einer Zeile oder Spalte die Teildeterminanten und letztendlich ergibt sich die Gesamtdeterminante als Summe der Teildeterminanten.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\underbrace{=}_{\substack{\text{Teildeterminanten} \\ \text{werden mit der Regel} \\ \text{von Sarrus wie in} \\ \text{Aufgabe 1 berechnet}}} -12 - 0 + 4(-48) - 2 = -12 - 192 - 2 = \mathbf{-206}$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \\ 0 & 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 3(-2) - 3(6) = \mathbf{-24}$$

Nebenrechnung $A \cdot B$ (Falk Schema)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 3 & 1 & 11 \\ 2 & 14 & 10 & -4 \\ -5 & 0 & 8 & 3 \\ 6 & 10 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Behauptung (1):

$$\begin{vmatrix} 14 & 3 & 1 & 11 \\ 2 & 14 & 10 & -4 \\ -5 & 0 & 8 & 3 \\ 6 & 10 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4944$$

Um diese Behauptung zu beweisen, stellen wir folgendes fest:

Lemma: [Determinanten-Multiplikationssatz]

Für $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt: $\det(A\cdot B) = \det A \cdot \det B$. Weiterhin ist $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1},$ falls $A \in GL(n;\ \mathbb{K})$, wobei GL für General linear Group (Gruppe der invertierbaren Matrizen) steht.

Beweis:

Beachten Sie, dass die beiden Gleichungen im Körper $\mathbb{K}$ gelten. Deshalb ist auch $\det(B\cdot A) = \det(A\cdot B)$. Aus den Matrizen A, B erhalten wir lineare Abbildungen F_A, F_B und $F_A \circ F_B = F_{A\cdot B}$, das heißt, wir haben ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}^n \arrow[rr, "F_{A\cdot B}"] \arrow[dr, "F_B"'] & & \mathbb{K}^n \\ & \mathbb{K}^n \arrow[ur, "F_A"'] & \end{tikzcd}$$

Aus der Maß- und Integrationstheorie (Analysis III) wissen wir, dass $|\det A|$ für den Fall $K = \mathbb{R}$ die Volumenverzerrung bei der Abbildung F_A angibt. Deshalb ist die Produktformel für Beträge der Determinanten klar. Die Vorzeichen der Determinante hängen hierbei mit der Orientierung zusammen. Aus obigen kommutativem Diagramm resultiert also: $F_{A\cdot B}(\mathbb{K}^n) \subset F_A(\mathbb{K}^n)$, also damit auch

$$\operatorname{rang}(A\cdot B) = \dim F_{A\cdot B}(\mathbb{K}^n) \leq \dim F_A(\mathbb{K}^n) = \operatorname{rang}(A)$$

Ist nun etwa $\operatorname{rang}(A) < k$, dann folgt $\operatorname{rang}(A\cdot B) < n$, also gilt dann auch $\det A = 0$ und $\det(A\cdot B) = 0$.

Ist nun $\text{rang}(A) = n$, dann folgt: $A \in GL(n; K)$. Es gibt also Elementarmatrizen $C_1, \ldots, C_k$ vom Typ (a) (Multiplikation einer Zeile mit einem Faktor ungleich 0) oder vom Typ (b) (Addition einer Zeile zu einer anderen), sodass $A = C_1 \cdot \ldots \cdot C_k$ (#)

Ist nun $S_i(\tau)$ mit $\tau \neq 0$ vom Typ (a), so ist $\det S_i(\tau) = \tau$. Weiterhin gilt für jedes $B' \in M^{(n\times n, K)}$

$\det(S_i(\tau) \cdot B') = \tau \cdot \det B'$ und damit $\det(S_i(\tau) \cdot B') = \det\big(S_i(\tau)\big) \cdot \det B'$

Ähnlich erkennen wir auch für Typ (b), dass $\det Q_i^j = 1$, also

$$\det\big(Q_i^j \cdot \mathrm{B}'\big) = \det Q_i^j \cdot \det \mathrm{B}'$$

Hiermit ist insgesamt gezeigt, dass die Produktformel in unserer Behauptung gilt, falls die links stehende Matrix vom Typ (a) oder (b) ist. (#) impliziert demnach:

$$\det A = \det\big(C_1 \cdot (C_2 \cdot \ldots \cdot C_k)\big) = \det C_1 \cdot \det(C_2 \cdot \ldots \cdot C_k) = \ldots = \det C_1 \cdot \ldots \cdot \det C_k$$

Außerdem folgt:

$$\det(A \cdot B) = \det\big(C_1(C_2 \cdot \ldots \cdot C_k \cdot B)\big) = \det C_1 \cdot \det(C_2 \cdot \ldots \cdot C_k \cdot B) =$$

$$\det C_1 \cdot \ldots \cdot \det C_k \cdot \det B = \det A \cdot \det B$$

Unser Lemma ist damit insgesamt bewiesen. ■

Der große Vorteil in unserem gerade eben gewonnenem Lemma liegt darin, dass wir bei der Berechnung der folgenden Determinante einfach nur die Determinanten von A und B multiplizieren brauchen und nicht erneut alle Teildeterminanten mit Sarrus bestimmen müssen.

$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B = (-206) \cdot (-24) = \mathbf{4944}$.

Mit dieser Rechnung haben wir unsere vorhin getroffene Behauptung (1) verifiziert und sind fertig. **w.z.b.w.**

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Multiplikation mir dem Skalar 0,5 liefert die Matrix $\tilde{A}$:

$$\tilde{A} := 0{,}5 \cdot A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 & 2 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}5 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \tilde{A} = \begin{vmatrix} 0{,}5 & 0 & 2 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}5 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 0{,}5 & 2 & 0{,}5 \\ -2 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0{,}5 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$4{,}125 + 2(-8{,}5) = \mathbf{-12{,}875}$$

Was erkennen wir hier: Es gilt doch offensichtlich für $A \in M^{(n\times n, \mathbb{K})}$ $\det(k \cdot A) = \frac{\det(A)}{k^{-n}} = \det(A) \cdot k^n$.

(Beweisen werden wir dies nicht, wir überlassen Ihnen das Verifizieren oder Finden eines Gegenbeispiels als kleine Extra-Übungsaufgabe. ☺)

Aufgabe 4:

Sei hier M die Menge aller Geraden in $\mathbb{R}^3$, wir haben dann zu zeigen, dass die Relation $G_1 \sim G_2$ wenn G_1 und G_2 parallel sind, eine Äquivalenzrelation auf M beschreibt.

Reflexivität: Offensichtlich ist jede Gerade G_1 zu sich selbst, also zu G_1 parallel (bzw. sogar identisch).
Symmetrie: Ist die Gerade G_1parallel zu G_2, dann ist G_2 offenbar auch parallel zu G_1.
Transitivität: Ist die Gerade G_1 parallel zu G_2 und G_2 wiederum parallel zu G_3, gilt also $G_1 || G_2$ und $G_2 || G_3$, dann ist auch G_1 parallel

zu G_3, d.h. $G_1||G_2$ und $G_2||G_3 \Rightarrow G_1||G_3$. Insgesamt beschreibt unsere Relation also eine Äquivalenzrelation. ■

Die Geraden lassen sich also aufteilen in Äquivalenzklassen zueinander paralleler Geraden in der Euklidischen Geometire.
In der Lehre der Geometrie I (SS 2011, HU Berlin) wurden solche Äquivalenzklassen als Parallelenschar bezeichnet, denn eine solche Äquivalenzklasse bildet ein spezielles Büschel.

Falls man nun einem affinen Raum für jede Parallelenschar einen *"unendlich fernen"* (auch *"uneigentlichen"*) Punkt (Fernpunkt) hinzufügt, in dem sich dann je zwei Geraden der Schar schneiden, dann resultiert ein *projektiver Raum* als projektiver Abschluss des affinen Raumes.

🗁 Bei beliebiger Dimension des Raumes gilt in der Euklidischen Geometrie außerdem:

Bei parallelen Geraden G_1 und G_2 ist der Abstand aller Punkte von G_1 zur Geraden G_2 konstant (und umgekehrt), die Geraden sind also immer gleich weit voneinander entfernt. Entsprechendes gilt sogar für parallele Ebenen.

Zudem gilt in der nichteuklidische Geometrie: Substituiert man das Parallelenaxiom durch die Forderung „Zu jeder Geraden und jedem Punkt, der nicht auf der Geraden liegt, gibt es mindestens zwei Geraden durch den Punkt, welche die gegebene Gerade nicht schneiden“, so erhält man eine nichteuklidische Geometrie, nämlich die hyperbolische Geometrie.