

Untergruppen von Automorphismen — Doppelstunde (LA 2)

Handout mit Beispielen, Aussagen und Aufgaben

Lernziele

Nach dieser Doppelstunde sollen Studierende:

- die Begriffe *Automorphismus*, *Automorphismengruppe* und *Untergruppe* sicher anwenden können,
- zentrale Beispiele von Untergruppen in $\text{Aut}(S)$ identifizieren (z. B. $O(n)$, SL_n , $\text{Inn}(G)$),
- die Rolle von Normaluntergruppen und Quotienten wie $\text{Out}(G)$ einordnen,
- eigenständig Untergruppen von konkreten Automorphismengruppen konstruieren.

Motivation und Einstieg (10–15 Min.)

Symmetrien sind strukturbewahrende Abbildungen. Ein Automorphismus ist ein Isomorphismus einer Struktur auf sich selbst, und die Menge aller Automorphismen bildet eine Gruppe unter Komposition. Untergruppen von Automorphismen fassen Teilfamilien von Symmetrien zusammen, die eine eigene (Unter-)Struktur tragen.

Definition 1 (Automorphismus, Automorphismengruppe). Sei S eine algebraische oder geometrische Struktur (z. B. Gruppe, Ring, Vektorraum, Graph). Ein *Automorphismus* ist ein Isomorphismus $f: S \rightarrow S$. Die *Automorphismengruppe* $\text{Aut}(S)$ ist die Menge aller Automorphismen von S mit der Komposition als Verknüpfung.

Bemerkung. Untergruppen von $\text{Aut}(S)$ sind Familien von Symmetrien, die abgeschlossen unter Komposition und Inversenbildung sind und das neutrale Element id enthalten.

Grundlagen und zentrale Beispiele (20 Min.)

Beispiel 1 (Vektorraumautomorphismen). Für einen endlichdimensionalen Vektorraum V über einem Körper K mit $\dim V = n$ gilt:

$$\text{Aut}(V) \cong \text{GL}_n(K).$$

Zentrale Untergruppen:

- $\text{SL}_n(K) = \{A \in \text{GL}_n(K) \mid \det A = 1\}$,
- Für $K = \mathbb{R}$: die orthogonale Gruppe $O(n) = \{A \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) \mid A^\top A = I\}$ und ihre Untergruppe $\text{SO}(n) = O(n) \cap \text{SL}_n(\mathbb{R})$.

Beispiel 2 (Automorphismen zyklischer Gruppen). Für $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ ist $\text{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$, der Einheitenring modulo n mit der Multiplikation. Untergruppen von $\text{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ entsprechen Untergruppen von $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.

Beispiel 3 (Graphen und Geometrie). Die Automorphismengruppe eines regulären m -Ecks in der Ebene ist die Dihedralgruppe D_{2m} (Rotationen und Spiegelungen). Untergruppen: reine Rotationsgruppe $\cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ sowie verschiedene Spiegelungsuntergruppen.

Aufgabe 1. Bestimmen Sie $\text{Aut}(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})$ und alle seine Untergruppen. Hinweis: Zerlegen Sie $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^\times$ und nutzen Sie Struktur der zyklischen/produktförmigen Teile.

Innere und äußere Automorphismen (20 Min.)

Definition 2 (Innere Automorphismen). Für eine Gruppe G ist der *konjugierende* Automorphismus zu $g \in G$ definiert durch

$$\varphi_g(x) = gxg^{-1}.$$

Die Menge aller solchen Automorphismen heißt *innere Automorphismengruppe* und wird mit $\text{Inn}(G)$ bezeichnet.

Satz 1. $\text{Inn}(G)$ ist eine Normaluntergruppe von $\text{Aut}(G)$, und es gilt ein kanonischer Quotient

$$\text{Out}(G) := \text{Aut}(G)/\text{Inn}(G),$$

die äußere Automorphismengruppe.

Bemerkung. Intuitiv misst $\text{Out}(G)$ die Automorphismen, die nicht durch Konjugation in G selbst erklärt werden. In der Klassifikation von Gruppen und in der Galoistheorie treten solche Quotienten zentral auf.

Beispiel 4. Ist G abelsch, dann ist jede Konjugation trivial, also $\text{Inn}(G) \cong \{\text{id}\}$. Damit ist $\text{Out}(G) \cong \text{Aut}(G)$.

Aufgabe 2. Zeigen Sie: Für jede Gruppe G ist der Homomorphismus $G \rightarrow \text{Aut}(G)$, $g \mapsto \varphi_g$, surjektiv genau dann, wenn $\text{Out}(G)$ trivial ist. Interpretieren Sie dies in Beispielen (z. B. $G = S_3$, $G = D_8$, G abelsch).

Untergruppen in klassischen Matrixgruppen (30 Min.)

Beispiel 5 (Ketten von Untergruppen). Für $K = \mathbb{R}$ und $n \geq 2$:

$$\text{SO}(n) \subset \text{O}(n) \subset \text{GL}_n(\mathbb{R}), \quad \text{SL}_n(\mathbb{R}) \subset \text{GL}_n(\mathbb{R}).$$

Weitere interessante Untergruppen:

- *Ähnlichkeitsgruppe eines festen Skalarprodukts:* $\text{O}(n)$,
- *Drehungen:* $\text{SO}(n)$,
- *Dilatationen und Scheren:* obere Dreiecksmatrizen,
- *Zentraler Skalarkern:* $\{\lambda I \mid \lambda \in K^\times\}$ als (meist) Zentrum von $\text{GL}_n(K)$,
- *Stabilisatoren:* Für eine Flagge $0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_k = V$ ist der Stabilisator eine parabolische Untergruppe (z. B. alle oberen Dreiecksmatrizen bzgl. einer Basis).

Aufgabe 3. Charakterisieren Sie die Untergruppe aller linearen Abbildungen, die eine gegebene innerproduktuelle Struktur erhalten. Zeigen Sie, dass sie genau $\text{O}(n)$ ist und dass $\text{SO}(n)$ die Zusammenhangskomponente der Eins (im topologischen Sinn) bildet.

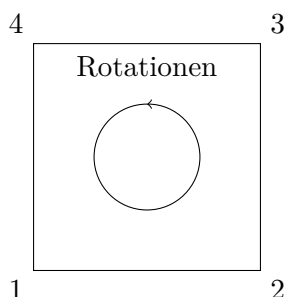
Aufgabe 4. Sei $V = \mathbb{R}^n$ mit einer festen Flagge $0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_k = V$. Beschreiben Sie die Untergruppe von $\text{GL}_n(\mathbb{R})$, die jede V_i invariant lässt, und geben Sie eine Matrixform in geeigneter Basis an.

Kurzer Exkurs: Automorphismen von Körpererweiterungen (10 Min.)

Beispiel 6 (Galois-Automorphismen). Für eine Körpererweiterung L/K ist $\text{Aut}(L/K)$ die Gruppe der K -Automorphismen von L . Untergruppen entsprechen Teilgruppen der Galoisgruppe; bei endlichen Galoiserweiterungen korrespondieren sie zu Zwischenkörpern (Hauptsatz der Galoistheorie). In der Doppelstunde genügt die Idee: Automorphismen als Symmetrien der Nullstellenstruktur eines Polynoms.

Aufgabe 5. Betrachten Sie $\text{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass diese Gruppe aus genau zwei Elementen besteht: id und komplexe Konjugation. Geben Sie passende Untergruppen und den Zusammenhang zur Erhaltung der Struktur (reelle Teilmenge) an.

Visualisierung: Symmetrien eines Quadrats (5 Min.)



Bemerkung. Die Automorphismengruppe dieses Graphen ist D_8 . Die Rotationen bilden eine zyklische Untergruppe der Ordnung 4; jede Spiegelung erzeugt eine weitere Untergruppe der Ordnung 2.

Zusammenfassung (5 Min.)

- Automorphismen erfassen Symmetrien; $\text{Aut}(S)$ ist eine Gruppe, deren Untergruppen strukturierte Teilfamilien von Symmetrien sind.
- In Gruppen: $\text{Inn}(G) \trianglelefteq \text{Aut}(G)$ und $\text{Out}(G) = \text{Aut}(G)/\text{Inn}(G)$.
- In linearen Settings: klassische Untergruppen wie SL_n , $\text{O}(n)$, Stabilisatoren von Flaggen.
- Zahlreiche konkrete Aufgaben vertiefen das Verständnis über verschiedene Strukturen hinweg.

Weiterführende Übungsaufgaben

Aufgabe 6. Bestimmen Sie alle Gruppenisomorphismen $\varphi: \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ und zeigen Sie, dass die Zuordnung $a \mapsto (x \mapsto ax)$ mit $a \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ einen Isomorphismus $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \cong \text{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ induziert. Klassifizieren Sie die Untergruppen für $n = 8, 12, 15$.

Aufgabe 7. Zeigen Sie, dass das Zentrum $Z(\text{GL}_n(K))$ aus den Skalarmatrizen besteht. Beschreiben Sie die zugehörige Untergruppe und diskutieren Sie ihre Rolle als Normaluntergruppe.

Aufgabe 8. Sei $G = S_n$ für $n \geq 3$. Untersuchen Sie $\text{Inn}(G)$ und $\text{Out}(G)$. Hinweis: Für $n \neq 2, 6$ ist jeder Automorphismus inner (klassisches Resultat).

Aufgabe 9. Zeigen Sie: Für einen endlichdimensionalen euklidischen Raum ist $\text{SO}(n)$ genau die Menge der orientierungserhaltenden Isometrien des Raums. Charakterisieren Sie die zugehörigen Untergruppen geometrisch.

Hinweise zur Durchführung

- Kurzvortrag zur Definition und Motivation (10 Min.), anschließend Beispiele (20 Min.).
- Partner-/Gruppenarbeitsphasen zu den Aufgaben (25–30 Min.) mit Zwischenbesprechungen.
- Vertiefung zu inneren/äußeren Automorphismen (20 Min.) und Matrixgruppen (15 Min.).
- Abschluss mit Visualisierung und Zusammenfassung (5 Min.).

Optionalen Ausblick: Verbindungen zur Galoistheorie (Korrespondenz Untergruppen $\leftrightarrow$ Zwischenkörper), zur Darstellungstheorie (Automorphismen von Darstellungen), und zur Geometrie (Isometriegruppen und ihre Untergruppen).