

## Definitionen-Zettel Nr. 5

---

**Lernziel: „Körper“ ist die stärkste algebraische Struktur, die man einer Menge geben kann. Es gibt schwächere Konzepte...**

---

**Definition 5.1:** Ein **Vektorraum**  $(V, K, +, \cdot)$  über einem **Körper**  $K$  ist eine Menge  $V$  mit zwei Verknüpfungen,  $+: V \times V \rightarrow V$  und  $\cdot: K \times V \rightarrow V$ , für die gilt:

(V1)  $(V, +)$  ist eine abelsche Gruppe.

(V2) Für das neutrale Element  $1$  (der Multiplikation in  $K$ ) gilt:  $1 \cdot v = v$  für alle  $v \in V$ .  
Es gilt das Assoziativgesetz  $a \cdot (b \cdot v) = (a \cdot b) \cdot v$  für alle  $a, b \in K$  und alle  $v \in V$ .

(V3) Es gelten die **Distributivgesetze**. Für alle  $a, b \in K$  und alle  $u, v \in V$  gilt:  
 $a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v$  und  $(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$ .

Der Unterschied zwischen einem Körper und einem Vektorraum ist insbesondere durch die Multiplikation gegeben (Eigenschaft V2 in der Definition 5.1 versus Eigenschaft K2 in der Definition 4.2). Von der Eigenschaft der Multiplikation als einer abelschen Gruppe bleiben lediglich die Existenz eines neutralen Elementes und das Assoziativgesetz. Das Besondere ist, dass zur Definition der Multiplikation der Vektorraum  $V$  allein nicht ausreicht. Die Abbildung ist *nicht*  $\cdot: V \times V \rightarrow V$ , wie man es bei der üblichen Multiplikation erwarten würde, sondern  $\cdot: K \times V \rightarrow V$ . Man benötigt also bei der Definition eines Vektorraums zusätzlich (als Grundlage) einen Körper. Insbesondere ist die Multiplikation in Vektorräumen aufgrund dieser Konstruktion nicht kommutativ oder invertierbar. Die Nicht-Kommutativität dieser Konstruktion bewirkt auch, dass man in V3 zwei Distributivgesetze benötigt.

Es gab in der Geschichte der Mathematik andere Vorstöße, um die stärkste algebraische Struktur, die man einer Menge geben kann (nämlich die Struktur eines Körpers), so abzuschwächen, dass die untersuchten Mengen darauf passen.

Zu erwähnen ist die Struktur des **Schiefkörpers**; im Vergleich zum Körper sind die Elemente eines Schiefkörpers nicht kommutativ bezüglich der Multiplikation (die Probleme gehen immer von der Multiplikation aus!). Eine weitere Vereinfachung des Körper-Konzepts heißt **Ring**. In diesem Fall lässt man als definierende Eigenschaft die Invertierbarkeit bezüglich der Multiplikation weg. Als letztes gibt es noch die ganz schwache algebraische Struktur eines **Moduls**. Der Modul ist so etwas wie ein Vektorraum, nur dass er über einem Ring und nicht über einem Körper definiert ist.

Lineare Algebra beschäftigt sich eigentlich nur mit Vektorräumen. Will man etwas über die anderen algebraischen Strukturen wissen, dann muss man „Algebra“ lernen.