Berechnung von $x = \sqrt[k]{z}$ nur mit Hilfe der Grundrechenarten. Dieses Verfahren war ("nur" für $k = 2$, später: Heron-Verfahren) schon vor mehr als 3700 Jahren in Mesopotamien bekannt. Die "Zauberformel" (Rekursion) lautet:

$$x_0 \in \mathbb{C} \qquad x_{n+1} = \frac{(k-1)}{k} x_n + \frac{z}{k \cdot x_n^{k-1}}$$

Beispiel $\sqrt[3]{1}$:

$x_0 = -1 + \boldsymbol{i}$ frei gewählt

$$x_1 = \frac{2}{3} x_0 + \frac{1}{3 \cdot x_0^2} = -\frac{2}{3} + \frac{5}{6}\boldsymbol{i}$$

$$x_2 = \frac{2}{3} x_1 + \frac{1}{3 \cdot x_1^2} \approx -0.58692 + 0.84110\boldsymbol{i}$$

$$x_3 = \frac{2}{3} x_2 + \frac{1}{3 \cdot x_2^2} \approx -0.49933 + 0.86627\boldsymbol{i}$$

$$x_4 = \frac{2}{3} x_3 + \frac{1}{3 \cdot x_3^2} \approx -0.5 + 0.86602\boldsymbol{i}$$

$x_5 = \frac{2}{3} x_4 + \frac{1}{3 \cdot x_4^2} \approx -0.5 + 0.86603\boldsymbol{i}$ (die angegebenen Stellen sind genau)

Fixpunkt der Zauberformel ausrechnen:

Angenommen, die Zahlenfolge (x_n) konvergiert. Dann wäre der Grenzwert x von (x_n) und der von (x_{n+1}) identisch. Es würde also gelten:

$$\begin{aligned} x &= \frac{(k-1)}{k} x + \frac{z}{k \cdot x^{k-1}} \\ &= \frac{(k-1)x^k + z}{k \cdot x^{k-1}} \end{aligned}$$

Also tatsächlich:

$$1 = \frac{(k-1)x^k + z}{k \cdot x^k} \iff k \cdot x^k = (k-1)x^k + z \iff x^k = z.$$