Vorlesungsmitschriften: http://www.zib.de/weiser/

Sprechstunde: Di 14-16, MA 676

1 Lineare Algebra

Algebra: von arab. al-ǧabr (das Ergänzen / Einsetzen)

(Teil einer) Methode zur Lösung von Gleichungen

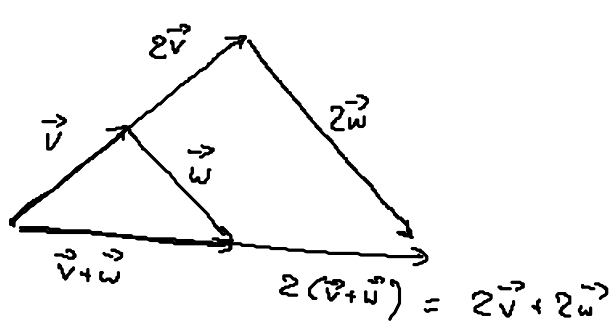
~ 825 n. Chr.

Teilgebiet der Mathematik: Lösung von Gleichungen, Strukturen von „Rechenoperationen"

linear: $a(v+w) = av + aw$

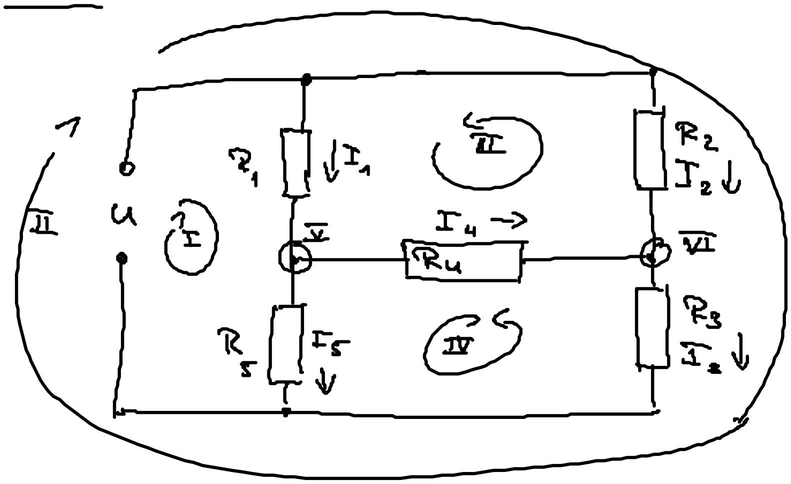
- große Bedeutung wg. enorm vielfältiger Anwendungen in Mathematik, Natur- und Sozialwissensch., Technik, ...
- lingua franca der Mathematik

Anschauung: Geometrie



Beispiele

1.2.1 Ströme in der Wheatstone-Brücke



Ohmsches Gesetz $U = R \cdot I$

Kirchhoffsche Gesetze

- Knotenregel:
- Maschenregel

$$
\begin{array}{llllllll}
R_1 I_1 & & & & + R_5 I_5 & = U & \mathrm{I} \\
 & R_2 I_2 & + R_3 I_3 & & & = U & \mathrm{II} \\
R_1 I_1 & - R_2 I_2 & & + R_4 I_4 & & = 0 & \mathrm{III} \\
 & & - R_3 I_3 & - R_4 I_4 & + R_5 I_5 & = 0 & \mathrm{IV} \\
I_1 & & & - I_4 & - I_5 & = 0 & \mathrm{V} \\
 & I_2 & - I_3 & + I_4 & & = 0 & \mathrm{VI}
\end{array}
$$

Gegeben: $R_1, \ldots, R_5, U$

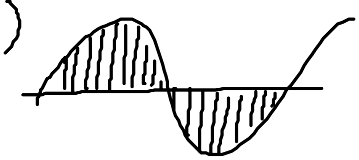
Gesucht: Stromstärken $I_1, \ldots, I_5$

lineares Gleichungssystem → lineare Algebra

Bsp Audiokompression

CD: Abtastung 44 kHz, 16 bit, Stereo → 160 kB/s

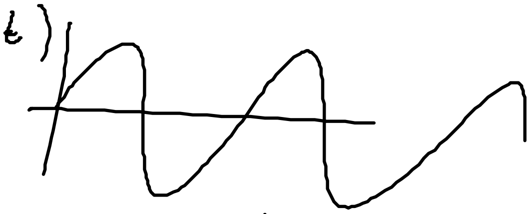
$f(t)$



$\longrightarrow$ Darstellung als Überlagerung von reinen Tönen

$$f = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \sin(\omega_i t)$$

$\sin(\omega_i t)$



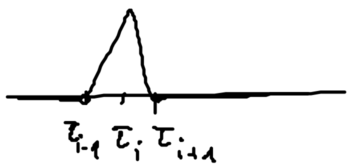
(Fourieranalyse)

Musikgenuß auch bei Speicherung von $n \ll N$ Koeffizienten

Darstellung als Samples in der Zeit

$$f = \sum_{i=1}^{N} a_i \, \delta_{\tau_i}$$

δ_{τ_i}



Basiswechsel

$\longrightarrow$ Lineare Algebra

Komplexe Zahlen

Aufbau des Zahlensystems

(i) natürliche Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

(ii) ganze Zahlen

Lösung von Gleichungen: $3 + x = 1$

$x \notin \mathbb{N}$!

Wir postulieren die Existenz einer Lösung (-2)

$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$

(iii) rationale Zahlen

Lösung von Gleichungen $3 \cdot x = 1$ $\quad x \notin \mathbb{Z}$

Wir postulieren die Existenz einer Lösung $(\frac{1}{3})$

$\mathbb{Q} = \{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, 0 \neq b \in \mathbb{N} \}$

(iv) algebraische Zahlen

Lösung von Gleichungen $x^2 = 2$

$x \notin \mathbb{Q}$

Wir postulieren die Existenz von Lösungen $(\sqrt{2})$

(v) reelle Zahlen

Grenzwertbildung $\quad x = \lim_{n\to\infty} a_n, \quad a_n \in \mathbb{Q}$

Wir postulieren die Existenz von Grenzwerten: $\mathbb{R}$

(vi) komplexe Zahlen

Lösung von Gleichungen: $\quad x^2 = -1, \quad x \notin \mathbb{R}$

Wir postulieren die Existenz von Lösungen

$i := \sqrt{-1}$ imaginäre Einheit $\quad \mathbb{C}$

Rechnen mit komplexen Zahlen

$i := \sqrt{-1}, \quad i^2 = -1$

Multiplizieren mit reellen Zahlen: $2i$, $3i$, πi

$$a, b \in \mathbb{R}: \quad a \cdot (bi) = (ab)i$$

Addition zu reellen Zahlen:

$$a, b \in \mathbb{R}: \quad z = a + bi \quad \in \mathbb{C}$$

Realteil $\quad$ Imaginärteil

Addition komplexer Zahlen:

$$(a+bi) + (c+di) = a+c + (b+d)i$$

Multiplikation:

$$(a+bi)(c+di) = ac + adi + cbi + bd\underbrace{i^2}_{=-1}$$

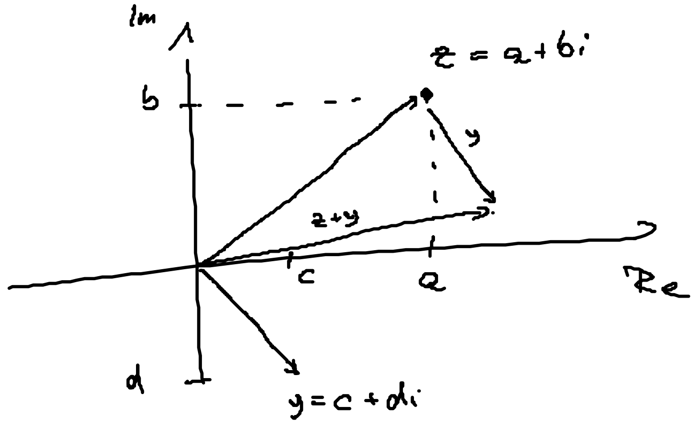
$$= ac - bd + (ad+cb)i$$

Konjugation $\quad z = a+bi$

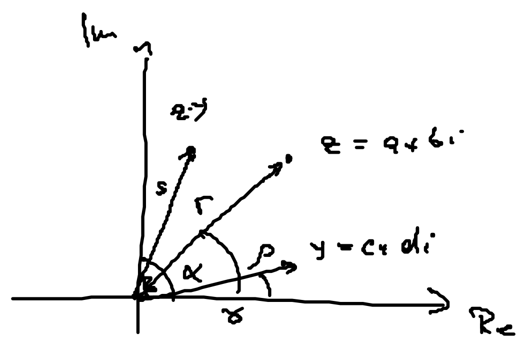
$$\bar{z} := a - bi$$

Darstellung: Zahlenebene

Addition



Multiplikation



$$\beta = \alpha + \gamma$$
$$s = r \cdot p$$

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$$