# 3 Matrizen

## 3.1 Motivation

Vektoren $\mathbb{R}^n$: eindimensionale Anordnung von Komponenten

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

(ein Index)

→ Töne (Schalldruck über der Zeit)

Matrizen $\mathbb{R}^{m,n}$: zweidimensionale Anordnung von Komponenten

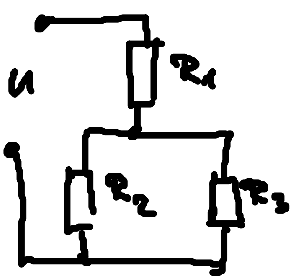
$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

(zwei Indices)

→ Bilder (Helligkeit über dem Ort)

$a_{ij}$: Helligkeit des Pixels an Position $(x_j, y_i)$

Weitere Anwendung: lineare Gleichungssysteme




$$\begin{aligned} I_1 - I_2 - I_3 &= 0 \qquad (i) \\ R_1 I_1 + R_2 I_2 &= U \qquad (ii) \\ R_1 I_1 + R_3 I_3 &= U \qquad (iii) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & R_2 & 0 \\ R_1 & 0 & R_3 \end{bmatrix} & \begin{matrix} (i) \\ (ii) \\ (iii) \end{matrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ I_1 & I_2 & I_3 \end{matrix} & \end{array}$$

## 3.2 Definition & Beispiele

**Def 3.2.1.** Für Zahlen $a_{ij} \in K$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ heißt das Zahlenschema

$$A := \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij}) = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

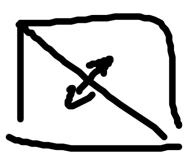
eine Matrix vom Format $(m \times n)$ oder einfach $m \times n$-Matrix.
Die Menge aller $m \times n$-Matrizen wird mit $K^{m,n}$ bezeichnet.

**Bem:** erster Index: Zeile
zweiter Index: Spalte

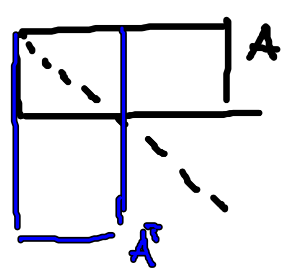
**Bsp:** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,3}$ $\qquad$ $\begin{bmatrix} i & 3 \\ 2 & -i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2}$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,1} = \mathbb{R}^3$ $\qquad$ Vektoren aus $K^n$ können mit Matrizen aus $K^{n,1}$ identifiziert werden.

**Transposition**



Spiegelung an der Diagonalen




## 3.3 Matrizen als Vektorraum

**Def 3.3.1** Vektorraumoperationen auf Matrizen
$A, B \in K^{m,n}$, $\alpha \in K$

Summe: $A + B := (a_{ij} + b_{ij})$ komponentenweise Addition

Multiplikation mit Skalar: $\alpha A := (\alpha a_{ij})$ komponentenweise

**Bsp**

$$\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5&6\\7&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&8\\10&12\end{bmatrix}$$

$$2\begin{bmatrix}3&4\\5&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&8\\10&12\end{bmatrix}$$

**Satz 3.3.3** Es gelten die Rechenregeln in $\mathbb{K}^{m,n}$

$$\begin{aligned}(A+B)+C &= A+(B+C) \\ A+0 &= A \\ A+B &= B+A \\ \alpha(\beta A) &= (\alpha\beta)A \\ \alpha(A+B) &= \alpha A+\alpha B \\ (\alpha+\beta)A &= \alpha A+\beta A \\ 1A &= A\end{aligned}$$

$$0=(0)_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$$

$\Rightarrow$ $\mathbb{K}^{m,n}$ ist ein Vektorraum

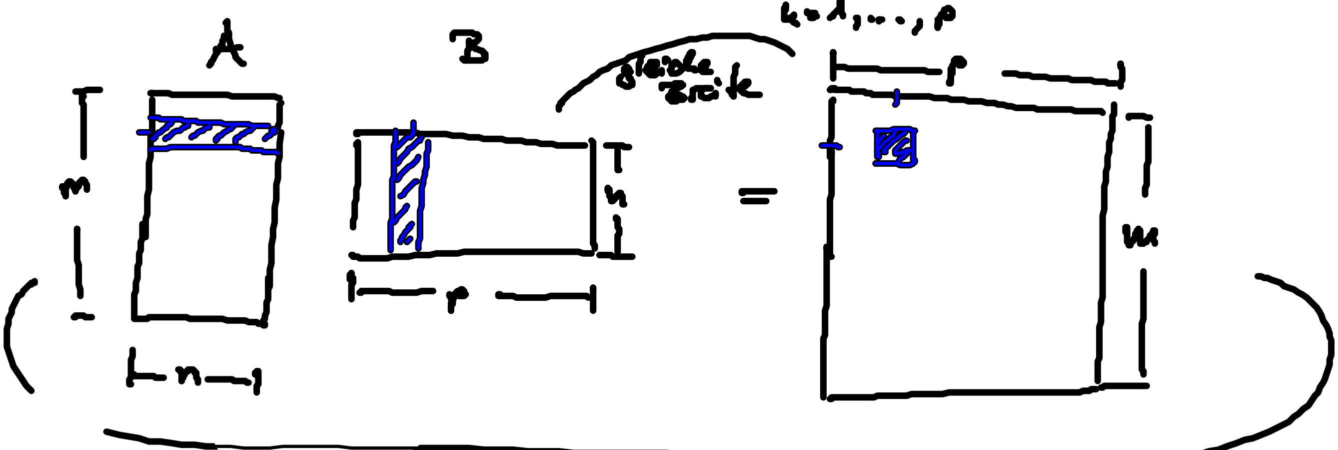
**Bem** Die Vektorraumoperationen in $\mathbb{K}^{m,1}$ und in $\mathbb{K}^{m}$ stimmen überein.

## 3.4 Matrizenmultiplikation

**Def. 3.4.1**

Sei $A\in\mathbb{K}^{m,n}$, $B\in\mathbb{K}^{n,p}$. Dann ist das Produkt $C=AB\in\mathbb{K}^{m,p}$ definiert durch

$$AB := \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,b_{jk}\right)_{\substack{i=1,\dots,m\\ k=1,\dots,p}}$$




**Achtung:** Formate müssen zusammenpassen

Addition: $\mathbb{K}^{m,n}\times\mathbb{K}^{m,n}\to\mathbb{K}^{m,n}$

Multiplikation: $K^{m,n} \times K^{n,p} \to K^{m,p}$

Bsp
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 9 \\ 22 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}}_{=}$$ $I_n$ neutrales Element

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$ Produkt von Diagonalmatrizen ist diagonal

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 8 & 15 \end{bmatrix}$$
$$\neq$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 11 & 16 \end{bmatrix}$$
$\Rightarrow$ Matrixmultiplikation ist nicht kommutativ

Def 3.4.3 Eine quadratische Matrix $A \in K^{n,n}$ heißt invertierbar, falls $B \in K^{n,n}$ existiert, so dass
$$AB = I_n$$
$B$ ist dann eindeutig und wird mit $A^{-1}$ bezeichnet.

Bem: Nicht alle Matrizen sind invertierbar!

z.B. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Lemma 3.4.5 Ist $A$ invertierbar, so gilt
$$A^{-1}A = I_n$$
($A$ und $A^{-1}$ kommutieren)

$A$ invertierbar: $AA^{-1} = I_n$

Bsp $I_n^{-1} = I_n$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

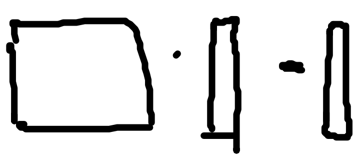
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \,?$$

**Def 3.4.8**
Eine Matrix heißt <u>unitär</u> falls $U^* U = I_n$

**Satz 3.4.9** Rechenregeln

$$
\begin{aligned}
(AB)C &= A(BC) \\
A(B+C) &= AB + AC \\
A(\alpha B) &= \alpha AB \\
(AB)^T &= B^T A^T \\
(AB)^{-1} &= B^{-1} A^{-1} \\
AI &= A \\
IA &= A \\
(A^{-1})^T &= (A^T)^{-1} =: A^{-T}
\end{aligned}
$$

**Bem:** Matrixmultiplikation und Identifizierung $K^{n,1}$ mit $K^n$ liefert sofort ein Matrix-Vektor-Produkt.



## 3.5 Lineare Abbildungen

**Def 3.5.1** Eine Abbildung

$$L: K^n \to K^m, \quad \vec{v} \mapsto L(\vec{v})$$

heißt <u>linear</u>, falls gilt

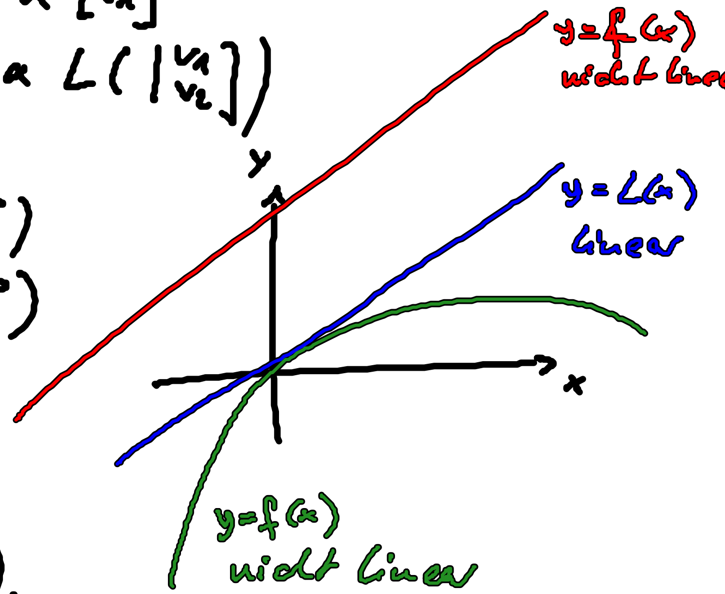
$$
\begin{aligned}
L(\vec{v} + \vec{u}) &= L(\vec{v}) + L(\vec{u}) \\
L(\alpha \vec{v}) &= \alpha L(\vec{v})
\end{aligned}
$$

Lin. Abb. heißen auch Homomorphismen. Die Menge der Homomorphismen von $K^n$ nach $K^m$ heißt $\mathrm{Hom}(K^n, K^m)$ oder $\mathcal{L}(K^n, K^m)$.

**Bsp** $L\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right) := [v_1] \qquad L \in \mathrm{Hom}(K^2, K^1)$

denn $$L\left(\begin{bmatrix} v_1\\ v_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} u_1\\ u_2\end{bmatrix}\right) = [v_1+u_1] = [v_1]+[u_1] = L\left(\begin{bmatrix} v_1\\ v_2\end{bmatrix}\right)+L\left(\begin{bmatrix} u_1\\ u_2\end{bmatrix}\right)$$

$$L\left(\alpha\begin{bmatrix} v_1\\ v_2\end{bmatrix}\right) = [\alpha v_1] = \alpha[v_1] = \alpha L\left(\begin{bmatrix} v_1\\ v_2\end{bmatrix}\right)$$




__Bem__: Stets gilt $L(\vec{0}) = \vec{0}$

denn $$L(\vec{0}) = L(0\cdot\vec{0}) = 0\cdot L(\vec{0}) = \vec{0}$$

__Def 3.5.4__ Sei $L \in \mathrm{Hom}(K^n, K^m)$.

Es ist $\mathrm{Kern}(L) := \{\vec{v}\in K^n \mid L(\vec{v}) = \vec{0}\}$

$\mathrm{Bild}(L) := \{L(\vec{v})\in K^m \mid \vec{v}\in K^n\}$

__Lemma 3.5.5__ Kern(L) ist Teilraum des Urbildraums $K^n$

Bild(L) ist Teilraum des Bildraums $K^m$

__Bsp__ $$L\left(\begin{bmatrix} v_1\\ v_2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} v_1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Kern}(L) = \left\{\begin{bmatrix} 0\\ v_2\end{bmatrix}\in K^2 \mid v_2\in K\right\}$$

$$\mathrm{Bild}(L) = \left\{\begin{bmatrix} v_1\\ 0\end{bmatrix}\in K^2 \mid v_1\in K\right\}$$

__Satz 3.5.7__ Lineare Abbildungen lassen sich durch Matrizen darstellen.

(i) Sei $A \in \mathbb{K}^{m,n}$. Dann ist $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $\vec{v} \mapsto A\vec{v}$ eine lineare Abbildung.

(ii) Sei $L \in \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^m)$. Dann gibt es genau eine Matrix $A_L \in K^{m,n}$ mit $L(\vec{v}) = A_L\vec{v} \quad \forall \vec{v} \in K^n$
(also $L = L_A$).
Die Spaltenvektoren von $A_L$ sind die Bilder der Standardbasisvektoren $\vec{e}_i$.

(iii) Für $A \in K^{m,n}$, $B \in K^{n,p}$ gilt

$$L_A \circ L_B = L_{AB} .$$

Dabei ist $(L_A \circ L_B)(\vec{v}) := L_A(L_B(\vec{v}))$

<u>Bem</u> Lineare Abbildungen und Matrizen lassen sich identifizieren. Statt $L_A$ schreiben wir daher einfach $A$.

<u>Bem</u> $\mathrm{Bild}(A) = \mathrm{span}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ Bild ist Spann der Spaltenvektoren von $A$.