3 Matrizen

3.1 Motivation

Vektoren $\mathbb{R}^n$: eindimensionale Anordnung von Komponenten

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

(ein Index)

→ Töne (Schalldruck über der Zeit)

Matrizen $\mathbb{R}^{m,n}$: zweidimensionale Anordnung von Komponenten

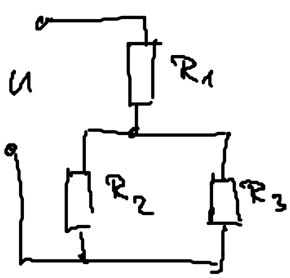
$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

(zwei Indices)

→ Bilder (Helligkeit über dem Ort)

a_{ij}: Helligkeit des Pixels an Position (x_j, y_i)

Weitere Anwendung: lineare Gleichungssysteme



$$\begin{aligned} I_1 - I_2 - I_3 &= 0 \qquad (i) \\ R_1 I_1 + R_2 I_2 &= U \qquad (ii) \\ R_1 I_1 + R_3 I_3 &= U \qquad (iii) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} \left[\begin{array}{ccc} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & R_2 & 0 \\ R_1 & 0 & R_3 \end{array}\right] \begin{array}{c} (i) \\ (ii) \\ (iii) \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ I_1 & I_2 & I_3 \end{array} \end{array}$$

3.2 Definition & Beispiele

Def 3.2.1. Für Zahlen $a_{ij} \in \mathbb{K}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ heißt das Zahlenschema

$$A := \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij}) = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

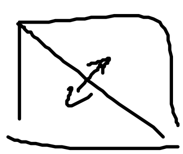
eine Matrix vom Format $(m \times n)$ oder einfach $m \times n$-Matrix.
Die Menge aller $m \times n$-Matrizen wird mit $\mathbb{K}^{m,n}$ bezeichnet.

Bem: erster Index: Zeile
zweiter Index: Spalte

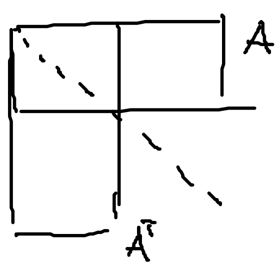
Bsp: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,3}$ $\qquad$ $\begin{bmatrix} i & 3 \\ 2 & -i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2}$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,1} = \mathbb{R}^3$ $\qquad$ Vektoren aus $\mathbb{K}^n$ können mit Matrizen aus $\mathbb{K}^{n,1}$ identifiziert werden.

Transposition



Spiegelung an der Diagonalen



3.3 Matrizen als Vektorraum

Def 3.3.1 Vektorraumoperationen auf Matrizen
$A, B \in \mathbb{K}^{m,n}$, $\alpha \in \mathbb{K}$

Summe: $A + B := (a_{ij} + b_{ij})$ $\qquad$ komponentenweise Addition

Multiplikation mit Skalaren $\quad \alpha A := (\alpha a_{ij})$ $\qquad$ komponentenweise

Bsp

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

$$2 \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

Satz 3.3.3 Es gelten die Rechenregeln in $\mathbb{K}^{m,n}$

$$(A+B)+C = A+(B+C) \qquad O = (0)_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

$$A+O = A$$

$$A+B = B+A$$

$$\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$$

$$\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$$

$$(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$$

$$1A = A$$

$\Rightarrow$ $\mathbb{K}^{m,n}$ ist ein Vektorraum

Bem Die Vektorraumoperationen in $\mathbb{K}^{m,1}$ und in $\mathbb{K}^m$ stimmen überein.

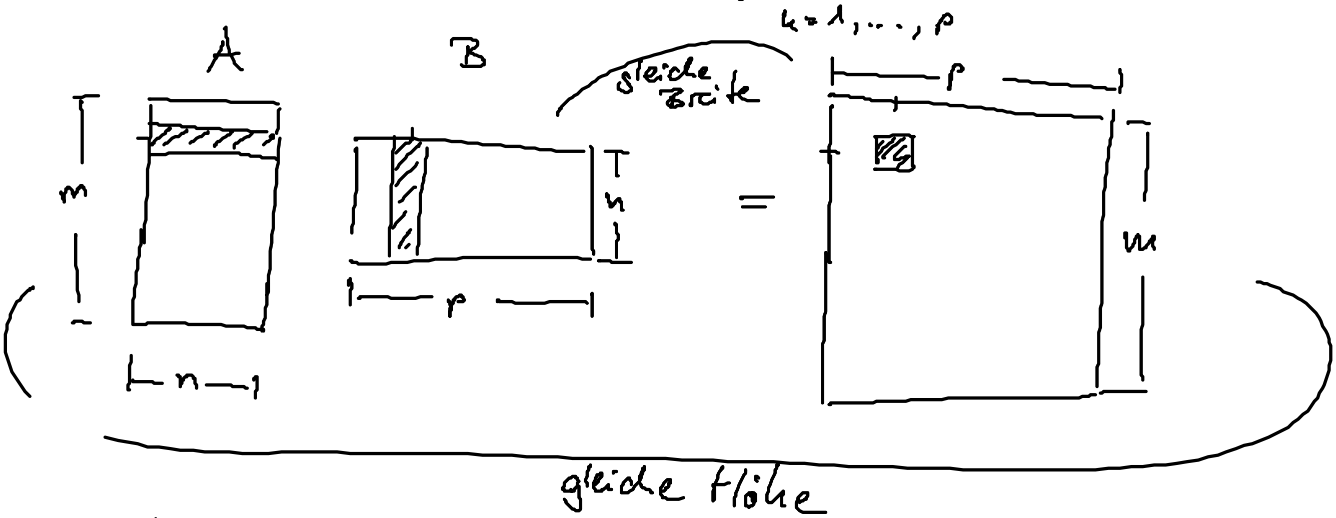
3.4 Matrizenmultiplikation

Def. 3.4.1

Sei $A \in \mathbb{K}^{m,n}$, $B \in \mathbb{K}^{n,p}$. Dann ist das Produkt

$C = AB \in \mathbb{K}^{m,p}$ definiert durch

$$AB := \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \right)_{\substack{i=1,\dots,m \\ k=1,\dots,p}}$$



Achtung: Formate müssen zusammenpassen

Addition: $\mathbb{K}^{m,n} \times \mathbb{K}^{m,n} \to \mathbb{K}^{m,n}$

Multiplikation: $\mathbb{K}^{m,n} \times \mathbb{K}^{n,p} \to \mathbb{K}^{m,p}$

Bsp

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 9 \\ 22 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}}_{} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}}_{}$$

I_n neutrales Element

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

Produkt der Diagonalmatrizen ist diagonal

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 8 & 15 \end{bmatrix}$$
$$\neq$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 11 & 16 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Matrixmultiplikation ist <u>nicht</u> kommutativ

<u>Def 3.4.3</u> Eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ heißt <u>invertierbar</u>, falls $B \in \mathbb{K}^{n,n}$ existiert, so dass

$$AB = I_n$$

B ist dann eindeutig und wird mit A^{-1} bezeichnet.

<u>Bem:</u> Nicht alle Matrizen sind invertierbar!

z.B. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

<u>Lemma</u> 3.4.5 Ist A invertierbar, so gilt

$$A^{-1} A = I_n$$

(A und A^{-1} kommutieren)

A invertierbar:

$$A A^{-1} = I_n$$

Bsp

$$I_n^{-1} = I_n$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

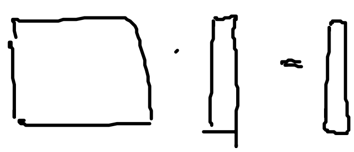
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = ?$$

Def 3.4.8
Eine Matrix heißt <u>unitär</u> falls $U^* U = I_n$

Satz 3.4.9 Rechenregeln

$$(AB)C = A(BC)$$
$$A(B+C) = AB + AC$$
$$A(\alpha B) = \alpha AB$$
$$(AB)^T = B^T A^T$$
$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$
$$AI = A$$
$$IA = A$$
$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} =: A^{-T}$$

Bem: Matrixmultiplikation und Identifizierung $\mathbb{K}^{n,1}$ mit $\mathbb{K}^n$ liefert sofort ein Matrix-Vektor-Produkt.



3.5 Lineare Abbildungen

Def 3.5.1 Eine Abbildung
$$L: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, \quad \vec{v} \mapsto L(\vec{v})$$
heißt <u>linear</u>, falls gilt
$$L(\vec{v} + \vec{u}) = L(\vec{v}) + L(\vec{u})$$
$$L(\alpha \vec{v}) = \alpha L(\vec{v})$$
Lin. Abb. heißen auch Homomorphismen. Die Menge der Homomorphismen von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$ heißt $\mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ oder $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$

Bsp $L\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right) := [v_1]$ $\qquad L \in \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^2, \mathbb{K}^1)$

denn $L\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}\right) = [v_1 + u_1]$

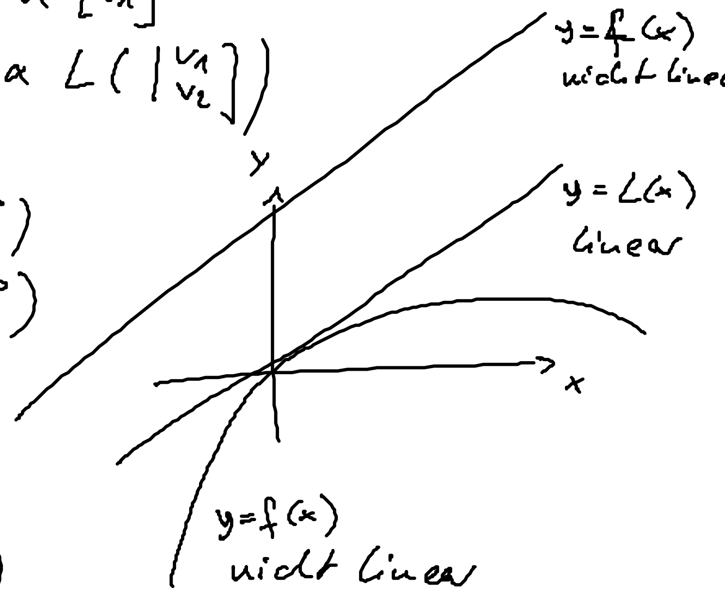
$$= [v_1] + [u_1]$$

$$= L\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right) + L\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$L\left(\alpha \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right) = [\alpha v_1]$$

$$= \alpha\, [v_1]$$

$$= \alpha\, L\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right)$$



__Bem__: Stets gilt $L(\vec{0}) = \vec{0}$

denn $L(\vec{0}) = L(0 \cdot \vec{0})$

$$= 0 \cdot L(\vec{0})$$

$$= \vec{0}$$

__Def 3.5.4__ Sei $L \in Hom(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$.

Es ist $Kern(L) := \{ \vec{v} \in \mathbb{K}^n \mid L(\vec{v}) = \vec{0} \}$

$Bild(L) := \{ L(\vec{v}) \in \mathbb{K}^m \mid \vec{v} \in \mathbb{K}^n \}$

__Lemma 3.5.5__ $Kern(L)$ ist Teilraum des Urbildraums $\mathbb{K}^n$

$Bild(L)$ ist Teilraum des Bildraums $\mathbb{K}^m$

__Bsp__ $L\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} v_1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$Kern(L) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ v_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^2 \mid v_2 \in \mathbb{K} \right\}$

$Bild(L) = \left\{ \begin{bmatrix} v_1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^2 \mid v_1 \in \mathbb{K} \right\}$

__Satz 3.5.7__ Lineare Abbildungen lassen sich durch Matrizen darstellen.

(i) Sei $A \in \mathbb{K}^{m,n}$. Dann ist $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $\vec{v} \mapsto A\vec{v}$ eine lineare Abbildung.

(ii) Sei $L \in \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^m)$. Dann gibt es genau eine Matrix $A_L \in \mathbb{K}^{m,n}$ mit $L(\vec{v}) = A_L \vec{v} \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{K}^n$ (also $L = L_A$).
Die Spaltenvektoren von A_L sind die Bilder der Standardbasisvektoren $\vec{e}_i$.

(iii) Für $A \in \mathbb{K}^{m,n}$, $B \in \mathbb{K}^{n,p}$ gilt

$$L_A \circ L_B = L_{AB}.$$

Dabei ist $(L_A \circ L_B)(\vec{v}) := L_A(L_B(\vec{v}))$

Bem: Lineare Abbildungen und Matrizen lassen sich identifizieren. Statt L_A schreiben wir daher einfach A.

Bem: $\mathrm{Bild}(A) = \mathrm{span}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ Bild ist Spann der Spaltenvektoren von A.