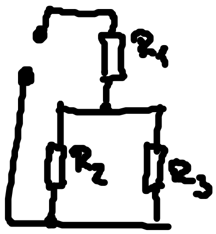
4 Gaußalgorithmus

4.1. Motivation

Bsp



$$\begin{aligned} I_1 - I_2 - I_3 &= 0 \\ R_1 I_1 + R_2 I_2 \qquad &= U \\ R_1 I_1 + \qquad R_3 I_3 &= U \end{aligned}$$

lineares Gleichungssystem (LGS)

Lösungsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}$

Koeffizientenmatrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & R_2 & 0 \\ R_1 & 0 & R_3 \end{pmatrix}$

„rechte Seite" $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ U \\ U \end{pmatrix}$

LGS $\Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{b}$

Lösungsformel für invertierbare A:

$$\underbrace{A^{-1}A}_{=I}\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

$$\Leftrightarrow \vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

z.B. $R_1 = 1$
$R_2 = 2$
$R_3 = 3$
$U = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Trick: geschicktes Umformen des LGS

(i) $a = b \Leftrightarrow \alpha a = \alpha b$ für $\alpha \neq 0$ — Multiplikation mit Skalar

(ii) $\begin{matrix} a = b \\ c = d \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} c = d \\ a = b \end{matrix}$ — Vertauschen von Zeilen

(iii) $\begin{matrix} a = b \\ c = d \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} a = b \\ c + \alpha a = d + \alpha b \end{matrix}$ für alle α — Addition von Vielfachen einer Zeile zu einer anderen

Übertragung auf LGS:

$$\left.\begin{array}{l} A_{i,*}: \text{ i-te Zeile von } A \\ a := A_{1,*}\vec{x}, \quad b := b_1 \\ c := A_{2,*}\vec{x}, \quad d := b_2 \\ \alpha := -1 \end{array}\right\} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{(iii)}{\Longleftrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Insgesamt:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{(ii)}{\Longleftrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{(iii)}{\Longleftrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -11 \end{bmatrix}\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \quad x_3 = \frac{2}{11}$$

$$\overset{(i)}{\Longleftrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2/11 \end{bmatrix}$$

$$\overset{(iii)}{\Longleftrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\vec{x} = \begin{bmatrix} 2/11 \\ 1 - 8/11 \\ 2/11 \end{bmatrix} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\overset{(iii)}{\Longleftrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\vec{x} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \quad \underbrace{I\vec{x}}_{=\vec{x}} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Achtung LGS müssen keine Lösung haben!

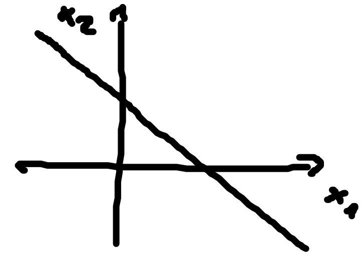
$$0 \cdot x = 1, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

oder können unendlich viele Lösungen haben:

$0 \cdot x = 0$, $\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\vec{x} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

Lösungsmenge $\mathbb{R}$, $\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2 \mid x_1+x_2=1\right\}$

$\Leftrightarrow x_2 = 1-x_1$



4.2 Lineare Gleichungssysteme

Def. 4.24 Die elementaren Zeilenoperationen in einer Matrix sind

(i) Multiplikation einer Zeile mit $\alpha \neq 0 \in K$
(ii) Vertauschen zweier Zeilen
(iii) Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen

Satz 4.25 Elementare Zeilenoperationen in der erweiterten Koeffizientenmatrix $[A|\vec{b}]$ ändern die Lösungsmenge eines LGS nicht.

4.3 Zeilenstufenform

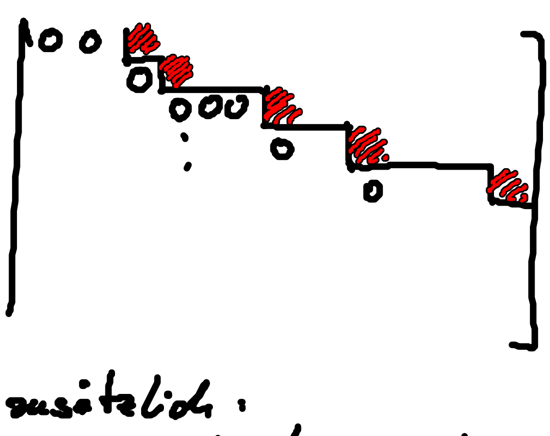
Ziel: systematische Umformung der erw. Koeff.-matrix $[A|\vec{b}]$ auf eine nützliche Normalform.

Def. 4.3.1 (Zeilenstufenform ZSF)

Der Kopf (Pivot) einer Zeile ist der erste (von links) Nicht-Null-Eintrag (sofern existent).

Eine Matrix ist in ZSF, falls gilt:

sind a_{ij} und a_{kl} zwei Köpfe mit $k>i$, so gilt $l>j$



→ unter einem Kopf sind nur Nullen

→ Nullzeilen einer ZSF-Matrix sind ganz unten

Gilt zusätzlich:

- jeder Kopf ist eine 1
- über jedem Kopf sind nur Nullen

⇒ hat die Matrix <u>normierte</u> ZSF (NZSF)

$$\left[\begin{array}{cccccccccc} 0\ 0 & \boxed{1 & *} & 0 & ** & 0 & * & \cdots & & 0 \\ & 0\ 0 & & 1 & ** & 0 & & & & \vdots \\ & & & & & 1 & * & & * & 0 \\ & & & & & & & & & 1 \\ & 0 & & & & & & & & \end{array}\right]$$

Def 4.3.2 Der <u>Rang</u> einer Matrix ist die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilen (oder Spalten).

Bem: Weil die Spalten von A ein Erzeugendensystem des Bildes sind, und eine maximal lin. unabh. Menge eine Basis bildet, ist $\text{Rang}(A) = \dim \text{Bild}(A)$.

Satz 4.3.3 Elementare Zeilenoperationen ändern den Rang nicht. Liegt A in ZSF vor, so ist $\text{Rang}(A)$ die Anzahl der Köpfe. (= Anzahl der Nicht-Nullzeilen)

Def 4.3.4 Ein LGS liegt in ZSF (NZSF) vor, wenn die erweiterte Koeff.-Matrix $[A|\vec{b}]$ in ZSF (NZSF) vorliegt.

$$\left[\begin{array}{ccccccccccccc|c} 0 & \cdots & 0 & 1 & * \cdots * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & & b_1 \\ 0 & \cdots & & & & 0 & 1 & * & \cdots * & 0 & * & \cdots & & \vdots \\ & & & & & & & & & 1 & * & \cdots & & b_r \\ & & & & & & & & & & & & & b_{r+1} \\ & & & & & & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & & & & & \vdots \end{array}\right] \leftarrow r = \text{Rang}(A)$$

Satz 4.3.5 Sei $\text{Rang}(A) = r$ und liege $[A|\vec{b}]$ in NZSF vor. Dann gilt:

(i) Ist $b_{r+1} \neq 0$ (also $\text{Rang}([A|\vec{b}]) > \text{Rang}(A)$), so hat das LGS keine Lösung.

(ii) Ist $b_{r+1} = 0$, so existiert mindestens eine Lösung

(a) Ist $r = n$ (alle Spalten sind Kopfspalten), so existiert genau eine Lösung $\vec{x} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \end{bmatrix}$

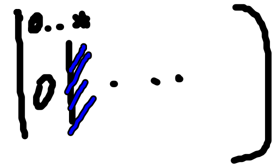
(b) Ist $r < n$, so existieren unendlich viele Lösungen

4.4 Gaußalgorithmus

Überführung von $[A|\vec{b}]$ in NZSF

Alg. 4.4.1 (ZSF)

Input: $A \in K^{m,n}$, $A \neq 0$



1. „linkeste" Kopfzeile nach oben tauschen
2. „radieren" unter dem Kopf:
   Addition eines geeigneten Vielfachen der ersten Zeile zu tieferen Zeilen, so daß die erste Spalte nur den Kopf enthält

3. Rekursion: wende Alg. 4.4.1 auf die Restmatrix $(a_{ij})_{\substack{i=2,\dots,m \\ j=2,\dots,n}}$ an.

Alg. 4.4.3 (NZSF)

Input: $A \in K^{m,n}$ in ZSF

1. Normieren der Köpfe: dividiere jede Kopfzeile durch den Kopf
2. „radieren" über den Köpfen: addiere ein geeignetes Vielfaches der Kopfzeile zu darüberliegenden Zeilen, so daß über den Köpfen nur Nullen stehen.

4.5 Lösung mit NZSF

Alg 4.5.1 (Allgemeine Lösung)

Input $A \in K^{m,n}$, $\vec{b} \in K^m$

Ausgabe: Lösungsmenge $L = \{\vec{x} \in K^n \mid A\vec{x} = b\}$

1. bringe $[A|\vec{b}]$ auf NZSF $[\tilde{A}|\tilde{\vec{b}}]$
2. Sei $J := \{j_1, \dots, j_r\}$ die Menge der Kopfspaltenindices

Dann gilt $L = \{\}$ falls $b_{r+1} \neq 0$ und sonst

$$L = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_{j_k} = \tilde{b}_k - \sum_{j \notin J} \tilde{a}_{kj} x_j,\ x_j \text{ für } j \notin J \text{ beliebig}\}$$

Alg 4.5.2 (Basis des Kerns)

Input: $A \in K^{m,n}$

Ausgabe: $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-r}\}$ Basis des Kerns

Kern: Lösungsmenge von $A\vec{x} = \vec{0}$

1. bringe $[A|\vec{b}]$ auf NZSF $[\tilde{A}|\tilde{\vec{b}}]$
2. Sei $\hat{J} := \{j_{r+1}, \dots, j_n\}$ die Menge der Nichtkopfspaltenindices

   Dann ist $(\vec{x}_i)_{j_k} := \begin{cases} -\tilde{a}_{k}\, x_{j_i} & , k = 1, \dots, r \\ 1 & , k = r+i \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$

Alg 4.5.3 (Basis des Bildes)

Input: $A \in K^{m,n}$
Ausgabe: Basis $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_r\}$ des Bildes

1. Bringe A auf ZSF $\tilde{A}$
2. Sei J die Menge der Kopfspaltenindices
   Dann ist $\vec{b}_i := A_{*j_i}$, $i = 1, \dots, r$

(Die Kopfspalten von A bilden eine Basis des Bildes)

Alg. 4.3.5 (Inverse)

Input: $A \in K^{n,n}$
Ausgabe: A^{-1} (sofern existent)

1. Bringe $[A|I_n]$ auf NZSF $[\tilde{A}|B]$
2. Ist $\tilde{A} = I_n$, so ist $B = A^{-1}$
   andernfalls ist A nicht invertierbar.