5 Vektorräume über $\mathbb{K}$

Bsp • $(\mathbb{C}^n, \mathbb{R}, \text{"+"}, \text{"·"})$ ist ein Vektorraum

• insbes. $\mathbb{C}$ ist ein reeller Vektorraum über $\mathbb{R}$ (entspricht dem $\mathbb{R}^2$)

• $C([a,b]) := \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig} \}$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$

$(\alpha f)(x) := \alpha f(x)$

• Polynome $\mathbb{R}_{\leq n}[x] := \{ \sum_{i=0}^{n} p_i x^i \mid p_i \in \mathbb{R} \}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$$\left.\begin{aligned} p(x) &= \sum_{i=0}^{n} p_i x^i \\ q(x) &= \sum_{i=0}^{n} q_i x^i \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} (p+q)(x) &:= \sum_{i=0}^{n} (p_i + q_i) x^i = p(x) + q(x) \\ (\alpha p)(x) &:= \sum_{i=0}^{n} (\alpha p_i) x^i = \alpha p(x) \end{aligned}$$

5.2 Basis & Dimension

Def 5.2.1 Sei V Vektorraum und $T \subset V$. Gilt

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad T \neq \emptyset \\ &\left.\begin{aligned} &\text{(ii)} \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in T : \quad \vec{u} + \vec{v} \in T \\ &\text{(iii)} \quad \forall \vec{u} \in T, \alpha \in \mathbb{K} : \quad \alpha \vec{u} \in T \end{aligned}\right\} \text{Abgeschlossenheit} \end{aligned}$$

dann heißt T Teilraum (Unterraum) von V.

Satz Ist $\{V, \mathbb{K}, \text{Plus}, \text{Mal}\}$ ein Vektorraum und $T \subset V$ ein Teilraum, so gilt: $\{T, \mathbb{K}, \text{Plus}, \text{Mal}\}$ ist ein Vektorraum. Sind T, V Vektorräume und $T \subset V$, so ist T Teilraum.

Bsp : • $T := \{ p \in \mathbb{R}_{\leq n}[x] \mid p(0) = 0 \} =: \mathbb{R}_{\leq n}[x] / 1$

ist ein Teilraum von $\mathbb{R}_{\leq n}[x]$

- $\mathbb{R}_{\leq n}[x]$ ist ein Teilraum $C([a,b])$
- $D := \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ ist Teilraum von $\mathbb{R}^{2,2}$

Diagonalmatrizen

<u>Def 5.2.6</u>

$\vec{v} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{v}_i$ heißt <u>Linearkombination</u> der Vektoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ zu den Koeffizienten $\alpha_i \in \mathbb{K}$

<u>Bsp</u> $x^2 + 2x + 4 \in \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ ist Linearkombination von

$-2x^3 + x^2, \quad x^3 + x + 2$

<u>Def</u> 5.2.9 Die <u>Lineare Hülle</u> (Spann) der Vektoren $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\} \subset V$ ist die Menge aller (endlichen) Linearkombinationen:

$$\operatorname{span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\} := \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{v}_i \in V \mid \alpha_i \in \mathbb{K} \right\}$$

Analog für Teilmengen $M \subset V$.

<u>Bsp</u>

- $\operatorname{span}\{x, x^2\} = \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \; / \!\!\! 1$
- $\operatorname{span} V = V$
- $T \subset V$ Teilraum $\Rightarrow \operatorname{span} T = T$

<u>Satz 5.2.11</u> Sei $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\} \subset V$. Dann ist $\operatorname{span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ Teilraum von V.

<u>Def</u> 5.2.12 Sei T Teilraum von V. Die Menge $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\} \subset V$ ($\subset T$) heißt <u>Erzeugendensystem</u> von T, falls

$$\operatorname{span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\} = T.$$

<u>Bsp</u> $\{x, x^2, x(x+1)\}$ ist ein Erzeugendensystem von $\mathbb{P}_{\leq 2}[x] \; / \!\!\! 1$, nicht aber von $\mathbb{P}_{\leq 2}[x]$

Def 5.2.18 V heißt <u>endlichdimensional</u>, falls ein endliches Erzeugendensystem existiert. (sonst unendlichdimensional)

Bsp $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ ist endlichdimensional: $\{1, x, x^2\}$ ist ein Erzeugendensystem.

$C([a,b])$ ist unendlichdimensional

Def 5.2.14 $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ heißt <u>linear unabhängig</u>, falls

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{v}_i = \vec{0} \quad \underline{\text{nur}} \text{ für } \alpha_i = 0 \ \forall i \text{ erfüllt ist.}$$

(sonst linear abhängig: $\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_k$: ein $\alpha_i \neq 0$: $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{v}_i = \vec{0}$)

Bsp $\{x, x^2, x(x+1)\}$ ist linear abhängig

$\{x, x(x+1)\}$ ist linear unabhängig

Def 5.2.19 Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem heißt <u>Basis</u>.

Bsp $\{x, x^2\}$ und $\{x, x(x+1)\}$ sind Basen von $\mathbb{R}_{\leq n}[x]/1$

Satz 5.2.22 Alle Basen eines endlichdimensionalen Vektorraums haben dieselbe Anzahl von Elementen.

Def 5.2.23 Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Dann ist die Anzahl der Elemente einer Basis die <u>Dimension</u> $\dim V$.

Satz 5.2.26 $\dim V$ ist die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren (oder unendlich, falls für alle $k \in \mathbb{N}$ linear unabhängige Mengen $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ existieren)

Bsp: $\dim(D) = 2$ Basis $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

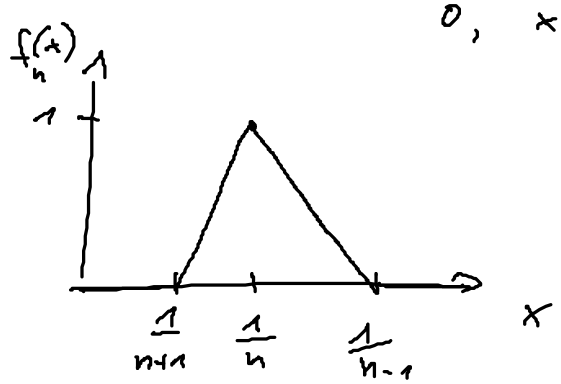
$\dim(\mathbb{R}_{\leq 2}[x]) = 3$ Basis $1, x, x^2$

$\dim(\mathbb{R}_{\leq 2}[x]/1) = 2$

$\dim(C([0,1])) = \infty$

denn $$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \le \frac{1}{n+1} \\ n((n+1)x-1), & \frac{1}{n+1} \le x \le \frac{1}{n} \\ 1-(n-1)(nx-1), & \frac{1}{n} \le x \le \frac{1}{n-1} \\ 0, & x \ge \frac{1}{n-1} \end{cases}$$

für $n=2, \dots$



Hütchenfunktionen

Offenbar ist $\{f_2, \dots, f_k\}$ linear unabhängig, denn für $0 = \sum_{i=2}^{k} \alpha_i f_i$ gilt wegen $\left(\sum_{i=2}^{k} \alpha_i f_i\right)\left(\frac{1}{n}\right) = \alpha_n \underbrace{f_n\left(\frac{1}{n}\right)}_{1} = 0$

auch $\alpha_n = 0$ für alle $n = 2, \dots$

Damit ist $C([0,1])$ unendlichdimensional.

5.3 Koordinaten

Satz 5.3.1 Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\} \subset V$ eine Basis.
Dann kann $\vec{v} \in V$ eindeutig als Linearkombination geschrieben werden:
$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{b}_i$$

Bew: Sei $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{b}_i$

$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \vec{b}_i$

$\vec{0} = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i)\vec{b}_i \Rightarrow \alpha_i - \beta_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = \beta_i$ $\square$

Def Die Koordinatenabbildung $K_{\mathcal{B}}$ zur Basis $\mathcal{B}$ ist definiert als

$$K_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{K}^n, \qquad \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{b}_i \longmapsto \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

Die inverse Abbildung $K_{\mathcal{B}}^{-1} : \mathbb{K}^n \to V$ ist gegeben durch

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{b}_i$$

$\Rightarrow$ eineindeutige Zuordnung zwischen Vektoren $\vec{v} \in V$ und Koeffizientenvektoren aus $\mathbb{K}^n$.

Satz Für $\vec{v}, \vec{u} \in V$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt

$$\vec{v} + \vec{u} = K_{\mathcal{B}}^{-1}\left(K_{\mathcal{B}}(\vec{v}) + K_{\mathcal{B}}(\vec{u}) \right)$$

$$\alpha \vec{v} = K_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\alpha K_{\mathcal{B}}(\vec{v}) \right)$$

d.h. V und $\mathbb{K}^n$ stimmen in ihrer Vektorraumstruktur überein (sind isomorph) und können daher miteinander identifiziert werden.