

6 Lineare Abbildungen

6.1 Einführung

Def 6.1.1. Seien V, W Vektorräume über \mathbb{K} . Dann heißt

$L: V \rightarrow W$ linear, wenn gilt

$$L(\vec{v} + \vec{u}) = L(\vec{v}) + L(\vec{u})$$

$$L(\alpha \vec{v}) = \alpha L(\vec{v})$$

Addition in W

für alle $\vec{v}, \vec{u} \in V$

$\alpha \in \mathbb{K}$

Addition
in V

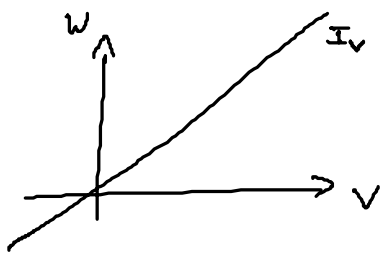
Die Menge der lin. Abb. $V \rightarrow W$ heißt $\text{Hom}(V, W)$

(Homomorphismen). Ist $W = V$, so heißt die Abbildung

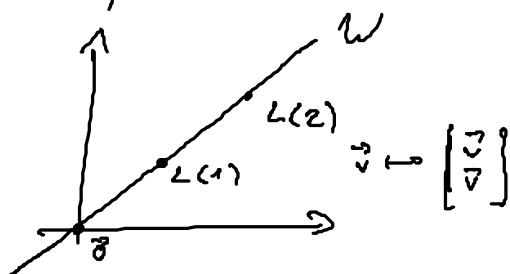
$$I_V: V \rightarrow V, \quad \vec{v} \mapsto \vec{v}$$

die Identität.

Bsp: $V = \mathbb{R}^1, W = \mathbb{R}^1$



Bsp $V = \mathbb{R}^1, U = \mathbb{R}^2$



Bsp $V = \mathbb{R}^2, W = \mathbb{R}^1$

$\vec{v}_1 \rightarrow v_1 + v_2$

Bsp $V = \mathbb{R}^{n,n}, W = \mathbb{R}$

$$A \mapsto \text{tr}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

Summe der Diagonalelemente
(Spur, trace)

Bsp $V = \mathbb{R}^{\begin{smallmatrix} \times \\ \leq n \end{smallmatrix}}, W = \mathbb{R}^{\begin{smallmatrix} \times \\ \leq n-1 \end{smallmatrix}}$

$f \mapsto f'$ Ableitung

Bsp $V = C([a, b]), W = V$

$f \mapsto g$ mit $g(x) = \int_{y=a}^x f(y) dy$

6.2 Vektorraum der linearen Abbildungen

Def 6.2.1 Seien V, W Vektorräume über \mathbb{K} und $L, M \in \text{Hom}(V, W)$ sowie $\alpha \in \mathbb{K}$. Dann seien durch

$$(L+M)(\vec{v}) := L(\vec{v}) + M(\vec{v})$$

$$(\alpha L)(\vec{v}) := \alpha L(\vec{v})$$

Vektorraum-Operationen „+“ und „ \cdot “ auf $\text{Hom}(V, W)$ definiert. Damit wird $\{\text{Hom}(V, W), \mathbb{K}, \text{„+“}, \text{„}\cdot\text{“}\}$ zu einem Vektorraum.

Bsp $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} v_1 \\ v_1 + v_2 \end{bmatrix}$

$M: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} v_2 \\ v_1 \end{bmatrix}$

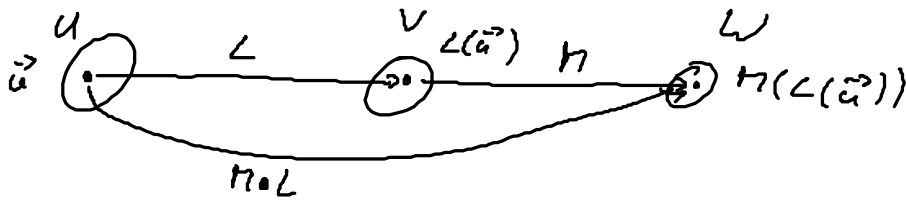
$L+M: \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} v_1 + v_2 \\ 2v_1 + v_2 \end{bmatrix}$

6.3. Komposition linearer Abbildungen

Def 6.3.1 Sind U, V, W Vektorräume über \mathbb{K} und $L \in \text{Hom}(U, V), M \in \text{Hom}(V, W)$. Dann ist die Komposition (Hintereinanderausführung, Produkt) definiert durch

$$" \circ " : \text{Hom}(U, V) \times \text{Hom}(V, U) \rightarrow \text{Hom}(U, U)$$

$$(\pi \circ L)(\vec{u}) := \pi(L(\vec{u}))$$



Bem $\pi \circ L$ ist tatsächlich linear, denn

$$\begin{aligned} (\pi \circ L)(\vec{u} + \vec{v}) &= \pi(L(\vec{u} + \vec{v})) = \pi(L(\vec{u}) + L(\vec{v})) \\ &= \pi(L(\vec{u})) + \pi(L(\vec{v})) \\ &= (\pi \circ L)(\vec{u}) + (\pi \circ L)(\vec{v}) \end{aligned}$$

analog für α

Def 6.3.2 Seien V, U Vektorräume über \mathbb{K} und $L \in \text{Hom}(V, W)$. Dann heißt L invertierbar, falls $L^{-1} \in \text{Hom}(W, V)$ existiert, so daß $L^{-1} \circ L = I_V$, $L \circ L^{-1} = I_W$.



L^{-1} heißt dann Inverse (Umkehrabbildung) von L .

Def 6.3.4 Sei $L \in \text{Hom}(V, V)$, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$L^0 := I_V, \quad L^{n+1} := L \circ L^n$$

und

$$L^{-n} := (L^n)^{-1} = (L^{-1})^n$$

Bsp $L\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_1 + v_2 \end{bmatrix} \Rightarrow L^{-1}\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 - v_1 \end{bmatrix}$

$$L^2\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} v_1 \\ 2v_1 + v_2 \end{bmatrix}$$

Def 6.3.7 Gilt $L^n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so heißt L nilpotent.

Bsp $L(p) := p'$ auf $\mathbb{R} \begin{bmatrix} x \\ \leq n \end{bmatrix}$ ist nilpotent zur Ordnung $n+1$.

6.4 Kern und Bild

Def 6.4.1 Sei $L \in \text{Hom}(V, W)$. Dann heißt
 $\text{Kern}(L) := \{ \vec{v} \in V \mid L(\vec{v}) = \vec{0} \}$
der Kern (Nullraum) von L , sowie
 $\text{Bild}(L) := \{ L(\vec{v}) \in W \mid \vec{v} \in V \} = \{ \vec{w} \in W \mid \exists \vec{v} \in V: L(\vec{v}) = \vec{w} \}$
das Bild von L .

Bsp $L(p) = p'$ auf $\mathbb{R} \begin{matrix} [x] \\ \leq n \end{matrix}$. $\text{Kern}(L) = \mathbb{R} \begin{matrix} [x] \\ \leq 0 \end{matrix}$ $\dim = 1$
 $\dim n+1$ $\text{Bild}(L) = \mathbb{R} \begin{matrix} [x] \\ \leq n-1 \end{matrix}$ $\dim = n$

Satz 6.4.4. Sei $L \in \text{Hom}(V, W)$. Dann ist $\text{Kern}(L)$ Teilraum von V und $\text{Bild}(L)$ Teilraum von W .

Bew : (i) $L(\vec{0}) = \vec{0}$ also ist $\text{Kern}(L)$ nicht leer
(ii) $L(\vec{v} + \vec{u}) = \underbrace{L(\vec{v})}_{=\vec{0}} + \underbrace{L(\vec{u})}_{=\vec{0}} = \vec{0} \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in \text{Kern}(L)$
(iii) $L(\alpha \vec{v}) = \underbrace{\alpha L(\vec{v})}_{=\vec{0}} = \vec{0} \quad \forall \vec{v} \in \text{Kern}(L), \alpha \in K$
(i) $L(\vec{0}) = \vec{0} \in \text{Bild}(L)$
(ii) $\underbrace{L(\vec{v})}_{\in \text{Bild}} + \underbrace{L(\vec{u})}_{\in \text{Bild}} = \underbrace{L(\vec{v} + \vec{u})}_{\in V}$ $\text{Bild}(L)$ abgeschlossen
(iii) $\alpha \underbrace{L(\vec{v})}_{\in \text{Bild}} = \underbrace{L(\alpha \vec{v})}_{\in V}$ $\text{Bild}(L)$ abgeschlossen □

Satz 6.4.5 (Dimensionsatz)

Sei $L \in \text{Hom}(V, W)$ und V endlichdimensional.

Dann gilt $\dim(V) = \dim(\text{Kern}(L)) + \dim(\text{Bild}(L))$

Def 6.4.6 Sei $L \in \text{Hom}(V, W)$ und $\vec{b} \in W$.

Die Menge $\{ \vec{x} \in V \mid L(\vec{x}) = \vec{b} \}$ heißt

Lösungsmenge der linearen Gleichung $L(\vec{x}) = \vec{b}$.

Ist $\vec{b} = \vec{0}$, so heißt die Gleichung homogen, sonst inhomogen.

Bem Die Lösungsmenge eines homogenen GLS ist der Kern der Abbildung.

Satz 6.4.7 Sei $L(\vec{x}) = \vec{b}$ eine lin. Gleichung und \vec{x}_p eine Lösung. Dann ist die Lösungsmenge

$$\vec{x}_p + \text{Kern}(L) := \{ \vec{x}_p + \vec{x}_k \mid \vec{x}_k \in \text{Kern}(L) \}$$

Bsp

$$\underbrace{p'}_{L(p)} = \underbrace{2x+1}_{\vec{b}}$$

Lösungsmenge

$$x^2 + x + \text{Kern}(L)$$

$$= x^2 + x + \mathbb{R} \underbrace{\begin{matrix} \text{Kern}(L) \\ \cong 0 \end{matrix}}$$

$$= \{ x^2 + x + c \mid c \in \mathbb{R} \}$$

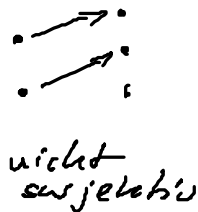
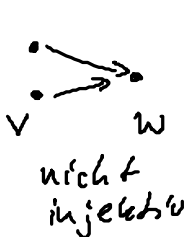
Zum Für Matrixabbildungen lassen sich Kern und Bild besonders einfach berechnen:
 Kern(A) ist die Lösungsmenge von $A\vec{x} = \vec{0}$
 Bild(A) ist die lin. Hülle der Spaltenvektoren (siehe NZSF in Kap 4).

Def 6.4.10 $L \in \text{Hom}(V, W)$ heißt

injektiv, falls jeder Bildvektor nur ein Urbild hat

surjektiv, falls jeder Vektor in W Bildvektor ist

bijektiv, falls L injektiv & surjektiv ist



Satz 6.4.11 Sei $L \in \text{Hom}(V, W)$. Dann gilt

$$L \text{ injektiv} \Leftrightarrow \text{Kern}(L) = \{ \vec{0} \} \Leftrightarrow \dim(\text{Kern}(L)) = 0$$

Ist V endlichdimensional, so gilt

$$L \text{ surjektiv} \Leftrightarrow \text{Bild}(L) = W \Leftrightarrow \dim(\text{Bild}(L)) = \dim(W)$$