7 Koordinaten & darstellende Matrizen

$\vec{x} \longmapsto A\vec{x}$ Matrix-Vektor-Multiplikation ist linear

$\Rightarrow$ · einfach darzustellen
· einfach auszurechnen

$\vec{x} \longmapsto L(\vec{x})$ ist linear

$\Rightarrow$?

7.1 Koordinatenvektoren

V sei endlichdim. Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit Basis $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$.

Dann ist $K_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{K}^n$ mit $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{b}_i \longmapsto (\alpha_i)_{i=1,\dots,n} \in \mathbb{K}^n$

die Koordinatenabbildung.

$K_{\mathcal{B}}$ ist bijektiv und linear, also invertierbar. V und $\mathbb{K}^n$ sind isomorph.

Aber: Berechnung von $K_{\mathcal{B}}(v)$?

Im allgemeinen existiert eine Standardbasis und
V ist als lin. Hülle der Standardbasis gegeben: $V = \operatorname{span}\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$

Herangehensweise:

1) Formulierung eines Gleichungssystems für die Koeffizienten α_i
2) Lösen das LGS (Gauß)

Mit Hilfe der Standardbasis gilt für die Basisvektoren $\vec{b}_j$:

$$\vec{b}_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} \vec{e}_i \quad \text{und} \quad \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{e}_i$$

Darstellung von $\vec{v}$ in $\mathcal{B}$:

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \vec{e}_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{b}_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \sum_{i=1}^{n} b_{ij} \vec{e}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij} \alpha_j \right) \vec{e}_i$$

Darstellung bzgl. einer Basis ist eindeutig

$$\Rightarrow \quad v_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \alpha_j \qquad \text{für alle } i = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow \underbrace{(b_{ij})_{i,j=1,\dots,n}}_{A\in K^{n,n}} \; \underbrace{(\alpha_j)_{j=1,\dots,n}}_{\vec\alpha} = \underbrace{(v_i)_{i=1,\dots,n}}_{\vec w}$$

$\vec w$: Koeffizienten von $\vec v$ zur Basis E

Spalten von A sind Koeffizienten von $\vec b_i$ zur Standardbasis

$$A\vec\alpha = \vec w$$

Bsp $V=\mathbb{R}^{2,2}$, $B=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$

$E=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$

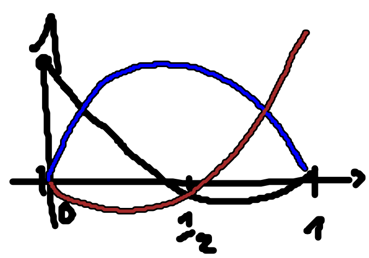
$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\-1&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\vec v=\begin{bmatrix}3&2\\3&1\end{bmatrix} \Rightarrow \vec w=\begin{bmatrix}3\\2\\3\\1\end{bmatrix} \qquad \vec\alpha = ?$$

$A\vec\alpha=\vec w$ Lösen: $\vec\alpha=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\2\end{bmatrix}$

Bsp $V=\mathbb{R}[x]_{\le 2}$, $B=\{2x^2-3x+1,\ -4x^2+4x,\ 2x^2-x\}$

$E=\{x^2, x, 1\}$



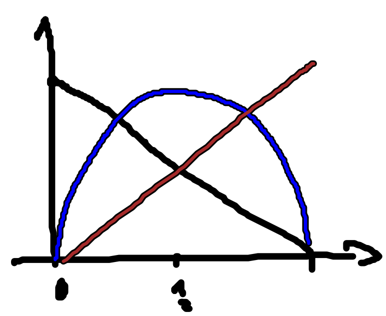
$\vec v = x^2$

$$\begin{bmatrix}2&-4&2\\-3&4&-1\\1&0&0\end{bmatrix}\vec\alpha=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \vec\alpha=\begin{bmatrix}0\\1/4\\1\end{bmatrix}$$

alternativ: $B=\{1-x,\ -4x^2+4x,\ x\}$

$\vec v = x^2$

$$\begin{bmatrix}0&-4&0\\-1&4&1\\1&0&0\end{bmatrix}\vec\alpha=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \vec\alpha=\begin{bmatrix}0\\-1/4\\1\end{bmatrix}$$



Beobachtung: Bezüglich verschiedener Basen hat ein Vektor ganz unterschiedliche Koordinatenvektoren!

7.2 Transformation bei Basiswechsel

Basen B, C

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "K_B"'] \arrow[dr, "K_C"] & \\ K^n \arrow[rr, "S_{B\to C}"'] & & K^n \end{tikzcd}$$

kommutatives Diagramm

$K_C = S_{B\to C} \circ K_B$

$S_{B\to C} = K_C \circ K_B^{-1}$

$\in \mathrm{Hom}(K^n, K^n)$

Umrechnung der Koordinatenvektoren

$$\vec{v}_C = K_C(\vec{v}) = S_{B\to C}\,\vec{v}_B \quad \text{mit } S_{B\to C} \in K^{n,n}$$

$$\left(S_{B\to C}\right)_{*,j} = S_{B\to C}\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix} \leftarrow j\text{-te Eintrag}$$

Koeffizientenvektor von $\vec{b}_j$ bezüglich C

Koeffizientenvektor von $\vec{b}_j$ bzgl. B

$\Rightarrow$ **Die Spalten von $S_{B\to C}$ sind die Koeffizientenvektoren der Basisvektoren $\vec{b}_j$ bezüglich der Basis C.**

Interpretation: $K_B^{-1} = S_{B\to E}$

$K_B = S_{E\to B}$

Berechnung von Basiswechseln

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{K}^n & \\
 & V \arrow[u, "K_E \text{ natürliche Identifizierung}"'] \arrow[dl, "K_B"'] \arrow[dr, "K_C"] & \\
\mathbb{K}^n \arrow[uur, bend left, "S_{B\to E}"] \arrow[rr, "S_{B\to C}"'] & & \mathbb{K}^n \arrow[uul, bend right, "S_{C\to E}"']
\end{tikzcd}$$

<u>Bsp</u> $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$

$$B = \{2x^2-3x+1,\ -4x^2+4x,\ 2x^2-x\}$$

$$C = \{1+x,\ -4x^2+4x,\ x\}$$

$$S_{B\to E} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_{C\to E} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow S_{B\to C} = S_{C\to E}^{-1} \circ S_{B\to E}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1/4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zweite Basisfunktion stimmt in B und C überein

7.3 Darstellung lin. Abbildungen

<u>Def</u> 7.3.1 Sei $L \in \mathrm{Hom}(V,V)$ und B eine Basis von V. Dann heißt

$$L_B = K_B \circ L \circ K_B^{-1} \in \mathbb{K}^{n\times n}$$

die <u>darstellende Matrix</u> von L bezüglich B.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "L"] \arrow[d, "K_B"'] & V \arrow[d, "K_B"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r] & \mathbb{K}^n
\end{tikzcd}$$

$$(L_B)_{*,j} = L_B \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow j\text{te Komponente}$$

$$= K_B\left(L\left(K_B^{-1}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\right)\right)\right)$$

$$= K_B(\underbrace{L(\vec{b}_j)}_{=:\vec{l}_j})$$

$$= (\vec{l}_j)_B$$

$\Rightarrow$ Spalten der Darstellungsmatrix L_B sind die Koeffizientenvektoren der Bilder der Basisvektoren!

<u>Berechnung</u>

1) Berechne $\vec{l}_j = L(\vec{b}_j)$ für $j = 1, \ldots, n$

2) Berechne $(\vec{l}_j)_B = K_B(\vec{l}_j)$

3) $L_B = [(\vec{l}_1)_B \ \ldots \ (\vec{l}_n)_B]$

<u>Bsp</u>: $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$, $B = \{x^3, x^2, x, 1\}$

$L(p) = p'$ Ableitung

$L(x^3) = 3x^2$
$L(x^2) = 2x$
$L(x) = 1$
$L(1) = 0$

$\Rightarrow (\vec{l}_1)_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad (\vec{l}_2)_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$(\vec{l}_3)_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad (\vec{l}_4) = \vec{0}$

Also $L_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

<u>Satz</u>: Es gilt $(L^{-1})_B = (L_B)^{-1}$

und $(L_2 \circ L_1)_B = (L_2)_B (L_1)_B$

7.4 Transformation von Darstellungsmatrizen bei Basiswechsel

$$\begin{tikzcd}
& V \arrow[r, "L"] \arrow[d, "K_B"] \arrow[ddl, "K_C"'] & V \arrow[d, "K_B"] \arrow[ddr, "K_C"] & \\
& \mathbb{K}^n \arrow[r, "L_B"] \arrow[dl, "S_{B\to C}"] & \mathbb{K}^n \arrow[dr, "S_{B\to C}"] & \\
\mathbb{K}^n \arrow[rrr, "L_C"'] & & & \mathbb{K}^n
\end{tikzcd}$$

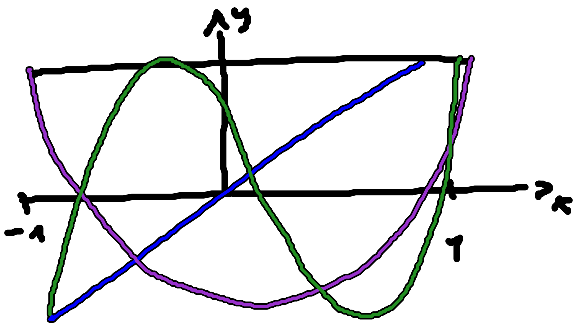
In welchem Verhältnis stehen L_B und L_C?

Offenbar gilt: $L_C = S_{B\to C} L_B S_{B\to C}^{-1}$

__Bsp__: $V = \mathbb{R}^{[x]}_{\le 3}$, $L(p) = p'$, $C = \{1, x, 2x^2-1, 4x^3-3x\}$

Čebyšev-Polynome

$$S_{C\to B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = S_{B\to C}^{-1}$$



$$\Rightarrow \quad L_C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$