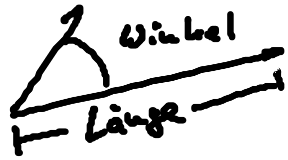
8 Euklidische & unitäre Vektorräume



8.1 Normen

<u>**Def**</u> 8.1.1. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ oder $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

Eine Funktion

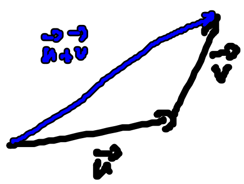
$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$$

$$\vec{v} \mapsto \|\vec{v}\|$$

heißt <u>Norm</u> (Länge), falls gilt

(i) $\|\vec{v}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$

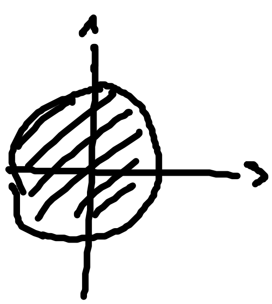
(ii) $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ (Dreiecksungleichung)



(iii) $\|\alpha \vec{v}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{v}\|$

<u>**Bsp**</u> 8.1.2 $V = \mathbb{R}^n$

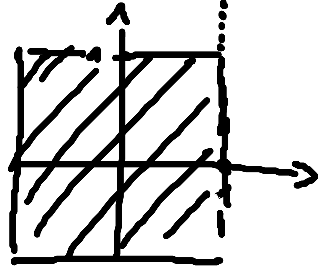
$$\|\vec{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$$ euklidische Norm, 2-Norm



Einheitskugel $B_1(\vec{0}) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x}\| \leq 1\}$

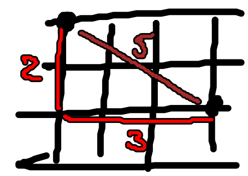
<u>**Bsp**</u> 8.1.3 Maximumnorm (∞-Norm)

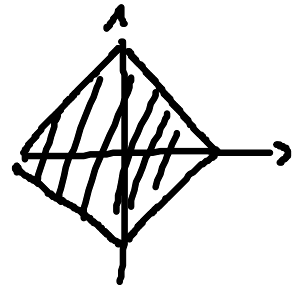
$$\|\vec{x}\|_\infty := \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$$



Bsp 8.1.4 1-Norm (New-York-Norm)

$$\|\vec{x}\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$





Bsp $V = \mathrm{Hom}(X,Y)$, X, Y seien normierte Vektorräume

$$\|L\| := \sup_{\|\vec{x}\|_X \le 1} \|L(\vec{x})\|_Y$$

8.2 Skalarprodukte

Def 8.2.1 Sei V reeller Vektorraum. Eine Abbildung

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

heißt (euklidisches) Skalarprodukt, falls gilt

(i) $\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$
(ii) $\langle \alpha \vec{u}, \vec{w} \rangle = \alpha \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$
$\Big\}$ linear im ersten Argument

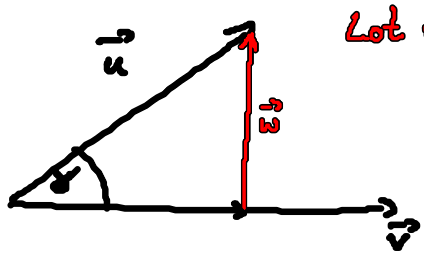
(iii) $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \ge 0$, $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$ Positivität

(iv) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$ Symmetrie

Gilt $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$, so heißen $\vec{u}$ und $\vec{v}$ orthogonal.
Ein reeller Vektorraum mit Skalarprodukt heißt euklidisch.

Bsp 8.2.3 $V = \mathbb{R}^n$, $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle := \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$ (Standard-Skalarprodukt)

Hier gilt $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\|_2 \, \|\vec{v}\|_2 \cdot \cos \sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})$



Lot von $\vec{u}$ auf $\vec{v}$

$$\vec{w} = \vec{u} - \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|^2}\,\vec{v}$$

Bsp

$$V = C([a,b])$$

$$\langle f, g\rangle := \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$$

$$V = C^1([a,b])$$

$$\langle f, g\rangle := \int_a^b w(x)\cdot f'(x)\,g'(x)\,dx + f(a)g(a), \quad w(x) > 0$$

8.3 Eigenschaften

Satz 8.3.1 Sei V Vektorraum mit Skalarprodukt. Dann ist durch

$$\|\vec{v}\| := \langle \vec{v}, \vec{v}\rangle^{1/2} \in \mathbb{R}^+$$

eine Norm definiert. Sie heißt die von $\langle\cdot,\cdot\rangle$ induzierte (dazu assoziierte) Norm.

Bem 8.3.3 Wird in Vektorräumen mit Skalarprodukt von „der Norm" gesprochen, ist die induzierte Norm gemeint.

Satz 8.3.4 Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Sei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Skalarprodukt in V und $\|\cdot\|$ die induzierte Norm. Dann gilt

$$|\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle| \le \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\| \qquad \forall\, \vec{u}, \vec{v} \in V$$

Bew (reeller Fall)

Sei $p(\alpha) = \langle \vec{u} + \alpha\vec{v}, \vec{u} + \alpha\vec{v}\rangle$

$$= \alpha^2 \langle \vec{v}, \vec{v}\rangle + 2\alpha\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle + \langle \vec{u}, \vec{u}\rangle \ge 0 \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$$

Insbes gilt für $\alpha = -\dfrac{\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v}\rangle}$

$$0 \le p(\alpha) = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle^2}{\langle \vec{v}, \vec{v}\rangle} - 2\,\frac{\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle^2}{\langle \vec{v}, \vec{v}\rangle} + \langle \vec{u}, \vec{u}\rangle$$

$$= -\frac{\langle \vec{u},\vec{v}\rangle^2}{\|v\|^2} + \|u\|^2$$

$$\Rightarrow \quad \langle \vec{u},\vec{v}\rangle^2 \leq \|v\|^2 \cdot \|u\|^2$$

□

8.4 Orthonormalbasen

Def 8.4.2 Sei V Vektorraum mit Skalarprodukt und $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ eine Basis. Gilt

$$\langle \vec{b}_i, \vec{b}_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases},$$

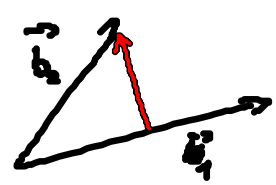
so heißt B Orthonormalbasis

Bsp 8.4.1 Ist B ONB, so lassen sich die Koeffizienten $K_B(\vec{v})$ einfach berechnen:

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{b}_i \quad \Rightarrow \quad \langle \vec{v}, \vec{b}_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle \vec{b}_i, \vec{b}_j \rangle$$

$$= \alpha_j$$

Konstruktion von ONB



Algorithmus 8.4.4. (Gram-Schmidt-Orthogonalisierung)

Input Basis $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$

Output ONB $\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_n$

Für $k=1,\dots,n$

(i) Lot auf den Spann der bisher erzeugten ONB-Vektoren

$$\vec{l}_k := \vec{b}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle \vec{b}_k, \vec{q}_i \rangle \vec{q}_i$$

(ii) Normieren:

$$\vec{q}_k := \frac{\vec{l}_k}{\|\vec{l}_k\|}$$

<u>Bsp</u>: $V = \mathbb{R}^{[x]}_{\leq 2}$, $\langle p, q \rangle = \int_0^1 pq \, dx$

$B = \{1, x, x^2\}$

$$\vec{l}_1 = \vec{b}_1 = 1, \quad \|\vec{l}_1\| = 1 \quad \Rightarrow \quad \vec{q}_1 = 1$$

$$\vec{l}_2 = x - \langle x, \vec{q}_1 \rangle \vec{q}_1 = x - \int_0^1 x \cdot 1 \, dx \cdot 1 = x - \frac{1}{2}$$

$$\|\vec{l}_2\| = \left(\int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx \right)^{1/2} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \Rightarrow \vec{q}_2 = \frac{\vec{l}_2}{\|\vec{l}_2\|} = \sqrt{3}\,(2x-1)$$

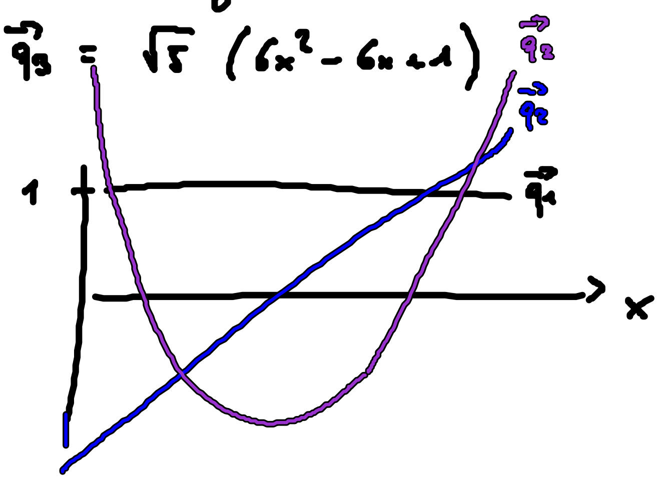
$$\vec{l}_3 = x^2 - \langle x^2, \vec{q}_1 \rangle \vec{q}_1 - \langle x^2, \vec{q}_2 \rangle \vec{q}_2$$

$$= x^2 - \int_0^1 x^2 \cdot 1 \, dx \, 1 - \int_0^1 x^2 \sqrt{3}(2x-1) \, dx \, \sqrt{3}\,(2x-1)$$

$$= x^2 - x + \frac{1}{6}$$

$$\|\vec{l}_3\| = \left(\int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)^2 dx \right)^{1/2} = \frac{1}{6\sqrt{5}}$$

$$\vec{q}_3 = \sqrt{5}\,(6x^2 - 6x + 1)$$



9 Orthogonale Abbildungen

<u>Def</u> 9.1.1. Sei V ein VR mit Skalarprodukt und $Q \in \mathrm{Hom}(V,V)$, Q surjektiv.

Q heißt <u>orthogonale Transformation</u>, falls f.a. $\vec{u}, \vec{v} \in V$ gilt:

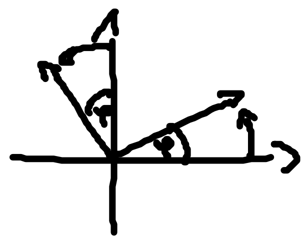
$$\langle Q\vec{u}, Q\vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

Im komplexen heißt Q <u>unitär</u>.

<u>Bem</u> 9.1.3 Für $V = \mathbb{R}^n$ mit Standard-Skalarprodukt sind orth. Transf. durch orth. Matrizen mit $Q^T Q = I$ gegeben.
Es gilt also: Die Spalten von Q bilden eine ONB

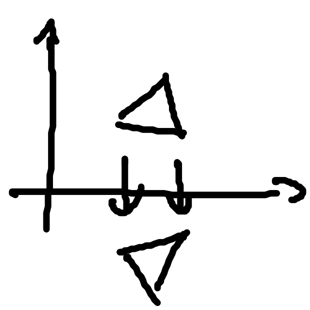
<u>Bem</u> 9.1.4. Bilder von ONB sind wieder ONB.

<u>Bsp</u> $V = \mathbb{R}^2$ Drehungen $R(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$



<u>Satz</u> 9.1.5. Für alle $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$ gilt $R(\varphi_1) R(\varphi_2) = R(\varphi_1 + \varphi_2)$.
Insbes. $R(\varphi_1) R(-\varphi_1) = R(0) = I$.
Die Drehmatrizen bilden eine kommutative Gruppe.

<u>Bsp</u> $S = \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}$ Spiegelung



<u>Bsp</u> Ist $z \in \mathbb{C}^2$ mit $\|z\| = 1$, so ist

$$Q = \begin{bmatrix} z_1 & -\bar{z}_2 \\ z_2 & \bar{z}_1 \end{bmatrix}$$ unitär.

<u>Bsp</u> Drehungen in $\mathbb{R}^n$

$$R_{ij}(\varphi) = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & c & \cdots & -s & & \\ & & \vdots & 1 \ddots 1 & \vdots & & \\ & & s & \cdots & c & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Drehung in der i-j-Ebene

Spiegelungen in $\mathbb{R}^n$

$$H(\vec{u}) = I - 2\,\frac{\vec{u} \cdot \vec{u}^T}{\vec{u}^T \vec{u}}$$

für $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ eine Spiegelung an der Normalenebene zu $\vec{u}$.