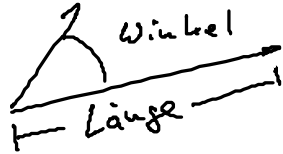


8 Euklidische & unitäre Vektorräume



8.1 Normen

Def 8.11. Sei V ein K -Vektorraum mit $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$.

Eine Funktion

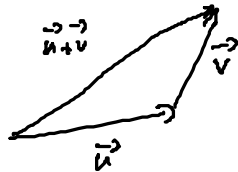
$$\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$$

$$\vec{v} \mapsto \|\vec{v}\|$$

heißt Norm (Länge), falls gilt

$$(i) \|\vec{v}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$$

$$(ii) \|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \quad (\text{Dreiecksungleichung})$$

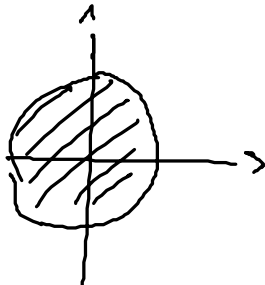


$$(iii) \|\alpha \vec{v}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{v}\|$$

Bsp 8.1.2 $V = \mathbb{R}^n$

$$\|\vec{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$$

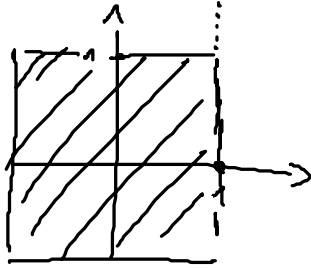
euklidische Norm, $\textcircled{2}$ Norm



$$\text{Einheitskugel } \mathcal{B}_1(\vec{0}) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x}\| \leq 1\}$$

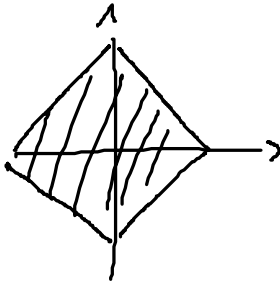
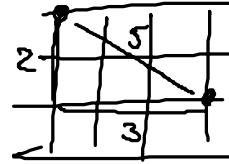
Bsp 8.1.3 Maximumnorm (∞ -Norm)

$$\|\vec{x}\|_\infty := \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$$



Bsp 8.1.4 1-Norm (New-York-Norm)

$$\|\vec{x}\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$$



Bsp $V = \text{Hom}(X, Y)$, X, Y seien normierte Vektorräume

$$\|L\| := \sup_{\|\vec{x}\|_X \leq 1} \|L(\vec{x})\|_Y$$

8.2 Skalarprodukte

Def 8.2.1 Sei V reeller Vektorraum. Eine Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

heißt (euklidisches) Skalarprodukt, falls gilt

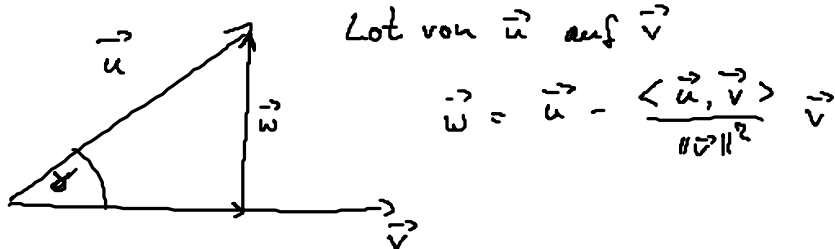
- (i) $\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$
- (ii) $\langle \alpha \vec{u}, \vec{w} \rangle = \alpha \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$
- (iii) $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \geq 0$, $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$ Positivität
- (iv) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$ Symmetrie

Gilt $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$, so heißen \vec{u} und \vec{v} orthogonal.

Ein reeller Vektorraum mit Skalarprodukt heißt euklidisch.

Bsp 8.2.3 $V = \mathbb{R}^n$, $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle := \sum_{i=1}^n u_i v_i$ (Standard-Skalarprodukt)

Hier gilt $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\|_2 \|\vec{v}\|_2 \cdot \cos \angle(\vec{u}, \vec{v})$



Bsp $V = C([a, b])$

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x) g(x) dx$$

$V = C'([a, b])$

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b w(x) \cdot f'(x) g'(x) dx, \quad w(x) > 0$$

$$+ f(a)g(a)$$

8.3 Eigenschaften

Satz 8.3.1 Sei V Vektorraum mit Skalarprodukt. Dann ist durch

$$\|\vec{v}\| := \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle^{1/2} \in \mathbb{R}^+$$

eine Norm definiert. Sie heißt die von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induzierte (dazu assoziierte) Norm.

Bem 8.3.3 Wird in Vektorräumen mit Skalarprodukt von „der Norm“ gesprochen, ist die induzierte Norm gemeint.

Satz 8.3.4 Cauchy - Schwarz - Ungleichung

Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Skalarprodukt in V und $\|\cdot\|$ die induzierte Norm.

Dann gilt

$$|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in V$$

Bew (reeller Fall)

Sei $p(\alpha) = \langle \vec{u} + \alpha \vec{v}, \vec{u} + \alpha \vec{v} \rangle$

$$= \alpha^2 \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle + 2\alpha \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Insbes gilt für $\alpha = -\frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$

$$0 \leq p(\alpha) = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} - 2 \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} + \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle$$

$$= - \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2}{\|\vec{v}\|^2} + \|\vec{u}\|^2$$

$$\rightarrow \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2 \leq \|\vec{v}\|^2 \cdot \|\vec{u}\|^2$$

□

8.4 Orthonormalbasen

Def 8.4.2 Sei V Vektorraum mit Skalarprodukt und $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ eine Basis. Gilt

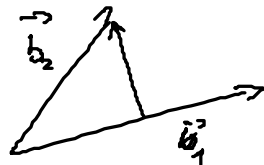
$$\langle \vec{b}_i, \vec{b}_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

so heißt B Orthonormalbasis

Bsp 8.4.1 Ist B ONB, so lassen sich die Koeffizienten $K_B(\vec{v})$ einfach berechnen:

$$\begin{aligned} \vec{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{b}_i &\rightarrow \langle \vec{v}, \vec{b}_j \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle \vec{b}_i, \vec{b}_j \rangle \\ &= \alpha_j \end{aligned}$$

Konstruktion von ONB



Algorithmus 8.4.4. (Gram-Schmidt-Orthogonalisierung)

Input Basis $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$

Output ONB $\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_n$

Für $k=1, \dots, n$

(i) Lot auf den Spann der bisher erzeugten ONB-Vektoren

$$\vec{l}_k := \vec{b}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle \vec{b}_k, \vec{q}_i \rangle \vec{q}_i$$

(ii) Normieren:

$$\vec{q}_k := \frac{\vec{l}_k}{\|\vec{l}_k\|}$$

Bsp: $V = \mathbb{R} \begin{bmatrix} x \\ \leq 2 \end{bmatrix}$, $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p q \, dx$

$$\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$$

$$\vec{l}_1 = \vec{b}_1 = 1, \quad \|\vec{l}_1\| = 1 \Rightarrow \vec{q}_1 = 1$$

$$\vec{l}_2 = x - \langle x, \vec{q}_1 \rangle \vec{q}_1 = x - \int_0^1 x \cdot 1 \, dx \cdot 1 = x - \frac{1}{2}$$

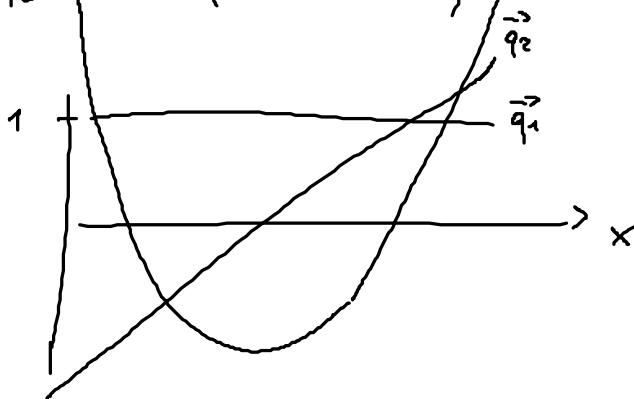
$$\|\vec{l}_2\| = \left(\int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx \right)^{1/2} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \Rightarrow \vec{q}_2 = \frac{\vec{l}_2}{\|\vec{l}_2\|} = \sqrt{3} \left(2x - 1\right)$$

$$\begin{aligned} \vec{l}_3 &= x^2 - \langle x^2, \vec{q}_1 \rangle \vec{q}_1 - \langle x^2, \vec{q}_2 \rangle \vec{q}_2 \\ &= x^2 - \int_0^1 x^2 \cdot 1 \, dx \cdot 1 - \int_0^1 x^2 \sqrt{3} (2x-1) \, dx \sqrt{3} (2x-1) \end{aligned}$$

$$= x^2 - x + \frac{1}{6}$$

$$\|\vec{l}_3\| = \left(\int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)^2 dx \right)^{1/2} = \frac{1}{6\sqrt{5}}$$

$$\vec{q}_3 = \sqrt{5} (6x^2 - 6x + 1) \vec{q}_2$$



9 Orthogonale Abbildungen

Def 9.1.1. Sei V ein VR mit Skalarprodukt und $Q \in \text{Hom}(V, V)$, Q surjektiv.

Q heißt orthogonale Transformation, falls f.a. $\vec{u}, \vec{v} \in V$ gilt:

$$\langle Q\vec{u}, Q\vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

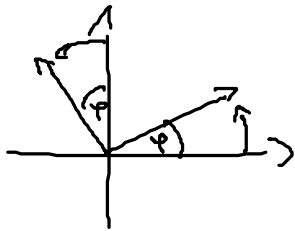
Im komplexen heißt Q unitär.

Bem 9.1.3 Für $V = \mathbb{R}^n$ mit Standard-Skalarprodukt sind orth. Transf. durch orth. Matrizen mit $Q^T Q = I$ gegeben.

Es gilt also: Die Spalten von Q bilden eine ONB

Bem 9.1.4. Bilder von ONB sind wieder ONB.

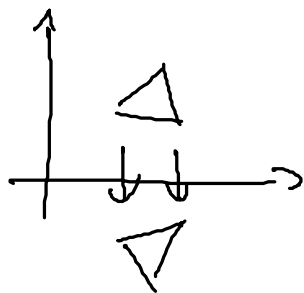
Bsp $V = \mathbb{R}^2$ Drehungen $R(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$



Satz 9.1.5. Für alle $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$ gilt $R(\varphi_1) R(\varphi_2) = R(\varphi_1 + \varphi_2)$.
Insbes. $R(\varphi_1) R(-\varphi_1) = R(0) = I$.

Die Drehmatrizen bilden eine kommutative Gruppe.

Bsp $S = \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}$ Spiegelung



Bsp Ist $z \in \mathbb{C}^2$ mit $\|z\| = 1$, so ist

$$Q = \begin{bmatrix} z_1 & -\bar{z}_2 \\ z_2 & \bar{z}_1 \end{bmatrix} \text{ unitär.}$$

Bsp Drehungen in \mathbb{R}^n

$$R_{ij}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \begin{matrix} c & \dots & -s \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s & \dots & c \end{matrix} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \end{matrix} \quad \text{Drehung in der } i\text{-}j\text{-Ebene}$$

Spiegelungen in \mathbb{R}^n

$$H(\vec{u}) = \mathbb{I} - 2 \frac{\vec{u} \cdot \vec{u}^T}{\vec{u}^T \vec{u}}$$

für $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ eine Spiegelung an der Normalenebene zu \vec{u} .