13 Lineare Differentialgleichungen

bekannt $A\vec{x} = \vec{b}$

z.B. $A = D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Darstellungsmatrix der Ableitung bzgl. der monomialen Basis $\{1, z, z^2, z^3\} \subset \mathbb{R}[z]_{\leq 3}$

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Koeffizientenvektor von z

$\vec{x} \in \left\{ \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\}$ Lösungsmenge $A\vec{x} = \vec{b}$:
alle Stammfunktionen von z : $\frac{1}{2} z^2 + c$
$\rightarrow$ Integration

Fixierung der Integrationskonstante:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} \vec{b} \\ \\ \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad c = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \\ \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung: Polynom p
mit $p'(z) = p(z)$
und $p(0) = 1$
$\Rightarrow$ existiert keine Lösung

$V = C^1([a,b])$

gesucht: $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $y'(z) = \frac{dy}{dz}(z) = y(z) \quad \forall z \in [a,b]$
$y(0) = c$

Lösung $y(z) = c\, e^{z}$

<u>Bsp</u> Mechanik: Bewegung eines Massepunkts

Bahnkurve: $\vec{x}(t)$

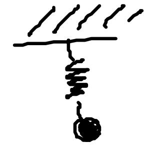
Geschwindigkeit: $\frac{d\vec{x}}{dt}(t) = \vec{v}(x(t))$

oder Beschleunigung: $\frac{d^2\vec{x}}{dt^2}(t) = \vec{F}(\vec{x}(t))$

<u>Bem</u> $\frac{d\vec{y}}{dt} = A\vec{y}$ heißt für die einzelnen Komponenten

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} y_k$$

<u>Bsp</u> 13.1.3 Newtonsche Gleichung für das Federpendel



$F = m \cdot a$

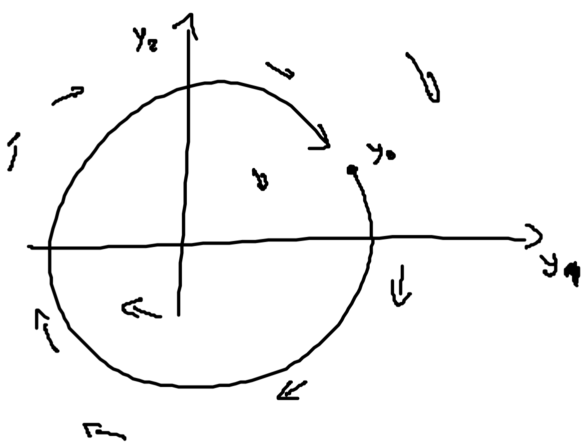
$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -k \cdot x$$

x: Auslenkung aus der Ruhelage

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

$$\vec{y} := \begin{bmatrix} x \\ \frac{dx}{dt} \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{d\vec{y}}{dt} = \begin{bmatrix} & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} \vec{y} = \omega \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \vec{y}$$

Lösung: $\vec{y}(t) = \begin{bmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{bmatrix} \vec{y}_0$



Richtung der Bahnkurve in jedem Punkt gegeben: Vektorfeld

13.3 Exponentialmethode

<u>Bsp</u>: $y \in \mathbb{R}^1$

AWP $\frac{dy}{dt} = ay$

$y(0) = y_0$

$\Rightarrow$ Lösung $y(t) = y_0 e^{at}$

Satz 13.3.1 Das AWP

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = A\vec{y}\ , \quad \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0$$

hat die eindeutige Lösung

$$\vec{y}(t) = e^{(t-t_0)A}\,\vec{y}_0 \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

<u>Bem</u> Berechnung der Lösung besonders einfach für diagonalisierbare A.

<u>Folgerung 13.3.3</u> Ist $\vec{y}_0$ EV zum EW λ, so gilt

$$\vec{y}(t) = e^{\lambda(t-t_0)}\,\vec{y}_0$$

Ist $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ eine Eigenbasis und

$$\vec{y}_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v}_i\ ,$$

so gilt $\vec{y}(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, e^{\lambda_i(t-t_0)}\,\vec{v}_i$

<u>Algorithmus</u>

Eingabe: A diagonalisierbar, $\vec{y}_0$, t_0

Ausgabe: $\vec{y}(t)$

(i) A diagonalisieren : $A = SDS^{-1}$

(ii) $\vec{y}(t) = S\, e^{(t-t_0)D}\, S^{-1}\,\vec{y}_0$

<u>Bem</u>: Weder S noch D müssen reell sein. Dennoch ist bei reellem A das Resultat $S e^{(t-t_0)D} S^{-1}$ reell.

<u>Bsp</u> 13.3.6

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = A\vec{y} \quad \text{mit} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{y}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(i) Diagonalisierung von A

char. Polynom $p_A(z) = \begin{vmatrix} -z & 1 \\ -1 & -z \end{vmatrix} = z^2+1$

$\Rightarrow$ EU $\quad \lambda_1 = i \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = -i \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

(ii) $$\vec{y}(t) = S e^{tD} S^{-1} \vec{y}_0$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{it} & \\ & e^{-it} \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{it} & \\ & e^{-it} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{it} \\ e^{-it} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{it} + e^{-it} \\ i(e^{it} - e^{-it}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}$$

13.4. Angeregte Oszillation

Sei $\quad m \frac{d^2 x}{dt^2}(t) = -Kx(t) + f(t)$ $\qquad$ m: Masse, K: Federkonstante, x: Auslenkung

die Gleichung für das Federpendel, $\quad f$ periodisch

Ansatz: $$x(t) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{N} x_k \, e^{\omega_k i t} \right)$$

$$f(t) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{N} f_k \, e^{\omega_k i t} \right)$$

$\rightarrow$ Basisdarstellung zur Basis $\{ e^{\omega_k i t} \mid k = 1, \dots, N \}$

Einsetzen:
$$\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{N} m \cdot x_k (\omega_k i)^2 e^{\omega_k i t} \right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{N} (-K x_k + f_k) e^{\omega_k i t} \right) \qquad \forall t \in [a,b]$$

$$\Rightarrow -\sum_{k=1}^{N} m x_k \omega_k^2 e^{\omega_k i t} = \sum_{k=1}^{N} (-K x_k + f_k) e^{\omega_k i t}$$

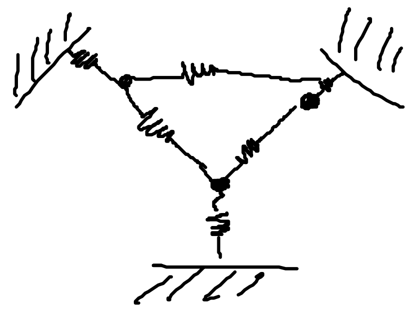
Koeffizienten der Basisdarstellung sind eindeutig

$\Rightarrow \quad (K - \omega_k^2 m)\, x_k = f_k$

$K - \omega_k^2 m = 0 \qquad \left(\omega_k^2 \text{ ist EW von } \frac{K}{m} \in \mathbb{R}^{1,1} \right)$

und $f_k \neq 0 \Rightarrow u_k = \infty$ (Resonanz)

Feder-Masse-Systeme



Massepunkte der Masse m

$\vec{x}(t)$: Auslenkung von der Ruhelage

$$\Rightarrow \quad m \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}(t) = -K\vec{x}(t) + \vec{f}(t)$$

$K \in \mathbb{R}^{n,n}$ symmetrisch

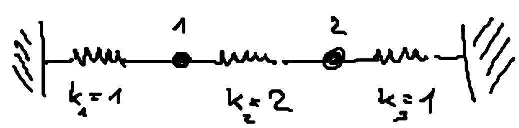
Ansatz mit Frequenzzerlegung (Fourier)

$$(K - \omega_k^2 m I)\, x_k = f_k$$

$\Rightarrow$ Resonanz bei Anregung mit Frequenz $\omega = \sqrt{\frac{\lambda_j}{m}}$

für EW λ_j von K

Bsp



$$\frac{d^2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}{dt^2} = \begin{bmatrix} -k_1 x_1 - k_2 (x_1 - x_2) \\ -k_3 x_2 - k_2 (x_1 - x_2) \end{bmatrix} + \vec{f}(t)$$

$$= - \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}}_{K} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \vec{f}(t)$$

hier $K = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ mit EW $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 5$

zu EV $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$