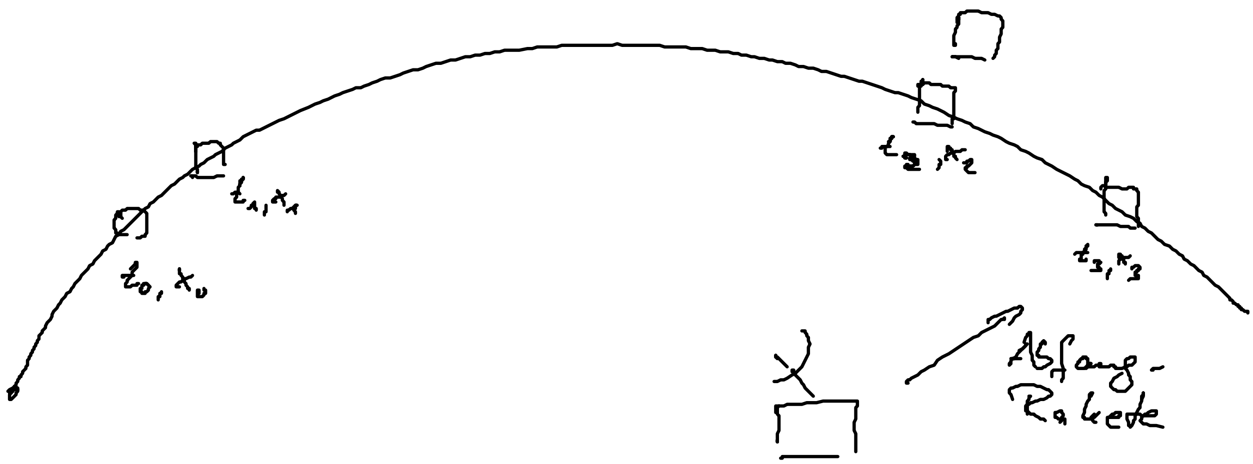
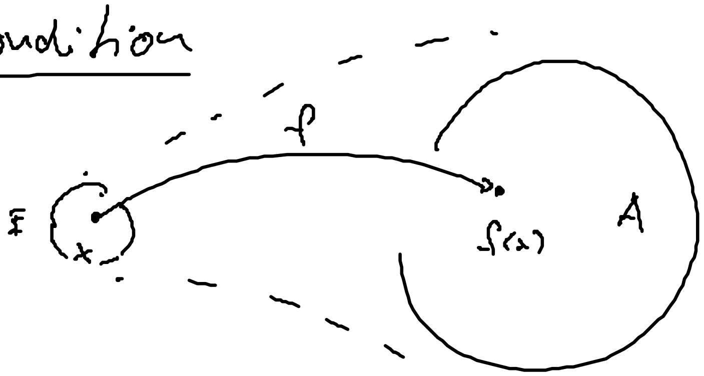
Patriot-Abwehrsystem



$$\sum_{i=1}^{10^5} f_i(x_1) - \sum_{i=1}^{10^5} f_i(x_2) \geq TOL$$

$$\sum_{i=1}^{10^5} \left(f_i(x_1) - f_i(x_2) \right) > TOL$$

Kondition



$$\kappa = \frac{|A|}{|E|}$$

Def Kondition κ ist die kleinste Zahl mit

$$\frac{\|f(\tilde{x}) - f(x)\|}{\|f(x)\|} \leq \kappa \frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} + o(\|\tilde{x} - x\|).$$

[relative normweise Kondition]

f differenzierbar: $\kappa = \frac{\|x\|}{\|f(x)\|} \cdot \|f'(x)\|$

Komponentenweise Kondition

$$\max_i \frac{|f_i(\tilde{x}) - f_i(x)|}{|f_i(x)|} \le \kappa \max_j \frac{|\tilde{x}_j - x_j|}{|x_j|} + o(\dots)$$

Stabilitätsfaktor

Def: Sei $\tilde{f}$ die Gleitkomma-Realisierung von f. Dann heißt die kleinste Zahl σ mit

$$\frac{\|\tilde{f}(\tilde{x}) - f(\tilde{x})\|}{\|f(\tilde{x})\|} \le \sigma \cdot \kappa \cdot eps + o(eps) \quad \text{für alle } \tilde{x}$$

der Stabilitätsindikator von $\tilde{f}$.

Für Elementaroperationen $*$ (gerundetes exaktes Ergebnis) gilt

$$\sigma \cdot \kappa \le 1$$

Bew $a \tilde{*} b = (a * b)(1+\varepsilon)$ mit $|\varepsilon| \le eps$ und daher

$$\frac{|a \tilde{*} b - a * b|}{|a * b|} = \frac{|(a*b)(1+\varepsilon - 1)|}{|a*b|} = |\varepsilon| \le eps$$

$\square$

Zusammengesetzte Funktionen

Sei $f = h \circ g$. Dann gilt $\sigma_f \kappa_f \le \sigma_h \cdot \kappa_h + \kappa_h \sigma_g \kappa_g$

Bew: $\|\tilde{f}(x) - f(x)\| = \|\tilde{h}(\tilde{g}(x)) - h(g(x))\|$

$$\le \|\tilde{h}(\tilde{g}(x)) - h(\tilde{g}(x))\| + \|h(\tilde{g}(x)) - h(g(x))\|$$

$$\le \sigma_h \cdot \kappa_h \cdot eps \, \|h(\tilde{g}(x))\| + \kappa_h \frac{\|\tilde{g}(x) - g(x)\|}{\|g(x)\|} \cdot \|h(g(x))\| + o(\dots$$

$$\leq \sigma_h \cdot \kappa_h \cdot eps\, \|h(g(x))\| + \kappa_h \sigma_g \kappa_g\, eps\, \|h(g(x))\| + o(eps)$$

$$\leq \left(\sigma_h \cdot \kappa_h + \kappa_h \sigma_g \kappa_g\right) eps\, \|h(g(x))\| + o(eps). \quad \square$$

Berechnung der Varianz

$$(n-1)\, S^2 = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}_{A} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}}_{B}$$

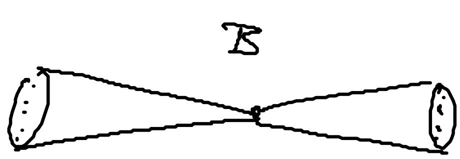
$$A = f \circ d \quad \text{mit} \quad f(\cdot) = \sum_{i=1}^{n} (\cdot)^2, \quad d(\cdot,\cdot) = \bullet - \bullet$$

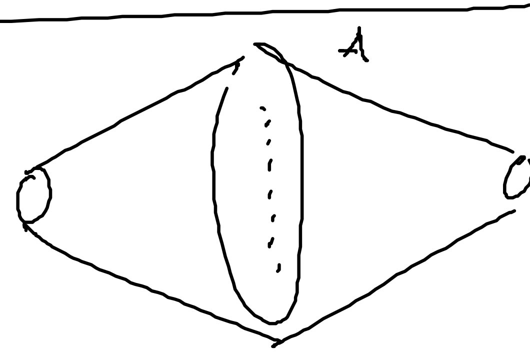
$$\sigma_A \kappa_A \leq \underbrace{\sigma_f \kappa_f}_{=2n} + \underbrace{\kappa_f}_{=2} \underbrace{\kappa_d \sigma_d}_{=1} = 2(n+1)$$

$$B = d \circ f$$

$$\sigma_B \kappa_B \leq \underbrace{\sigma_d \kappa_d}_{=1} + \underbrace{\kappa_d}_{\gg 1} \underbrace{\kappa_f \sigma_f}_{2n} \gg 2n+1$$

$$\boxed{\text{Merke: schlecht konditionierte Teilschritte gehören an den Anfang eines Algorithmus!}}$$





Summation von Reihen

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i} \approx \log N$$