Irreguläre Integranden und adaptive Gitter

$f(x) = \sqrt{x}$ integrieren über $[0,1]$
mit summierten Quadraturformeln

(a) äquidistante Intervallaufteilung
offenbar unbefriedigend

deshalb nichtuniforme Aufteilung

(b) was ist eine optimale Intervallaufteilung?

(c) wie kann eine (fast) optimale Aufteilung
numerisch realisiert werden?

Bsp Mittelpunktregel

Teilintervall $[a,b]$: Fehler $\varepsilon[a,b] = f''(\xi)\cdot\frac{(b-a)^3}{24}$ mit $\xi\in[a,b]$

Intervallweite $h: [0,1] \to \mathbb{R}$ stückweise konstant

$\varepsilon: [0,1] \to \mathbb{R}$ stückweise konstant

Kontinuierliches Modell:

lokale Gitterweite $h(t)$

lokale Fehlerdichte $\varepsilon(t) = f''(t)\cdot\frac{h(t)^2}{24}$

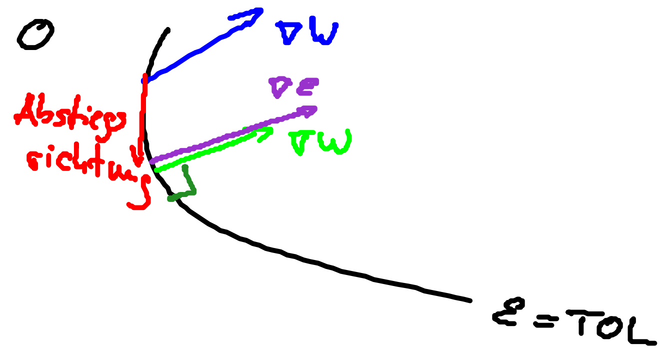
Gesamtfehler $\varepsilon = \int_0^1 \varepsilon(t)\,dt = \frac{1}{24}\int_0^1 f''(t)\,h(t)^2\,dt$

Gesamtaufwand $W = \int_0^1 \frac{1}{h(t)}\,dt$

$\min_h W$ unter Nebenbedingung $\varepsilon = TOL$

Lösungen sind charakterisiert durch KKT-Bedingung

$\exists \lambda \in \mathbb{R}: \; W'(h) + \lambda \varepsilon'(h) = 0$



Hier $W'(h) = -\dfrac{1}{h(t)^2}$

$$\varepsilon'(h) = \frac{f''(t)}{12} h(t)$$

Also $-\dfrac{1}{h(t)^2} + \lambda \dfrac{f''(t)}{12} h(t) = 0$

$$\Rightarrow \frac{f''(t)}{24} h(t)^3 = \text{const}$$

Optimale Gitterweitenverteilung:
Gleichverteilung des lokalen Fehlers

$\longrightarrow$ Konstruktionsprinzip für adaptive Integration

Hier $f(t) = \sqrt{t} \Rightarrow f''(t) = \frac{3}{4} t^{-3/2}$

$$\Rightarrow h(t) \sim \sqrt{t}$$

Analog: Simpson lokaler Fehlerbeitrag $\sim f^{(4)}(t) \cdot h^5$

$$t^{-7/2} h^5 = \text{const}$$

$$\Rightarrow h \sim t^{7/10}$$

strenger für kleine h

Zum Vergleich: Forderung $\varepsilon[a,b] \leq (b-a)\,TOL \Rightarrow \varepsilon[0,1] \leq TOL$
wie in Programmieraufgabe 6 führt
nicht zur Gleichverteilung lokaler Fehler
und daher nicht zu optimalen Gittern.

Aber: ist einfacher zu implementieren und
zu parallelisieren.

Konvergenzordnungen

uniforme (äquidistante) Unterteilung $\varepsilon = \alpha \cdot h^{\beta}$

adaptive Unterteilung: was ersetzt h?

Interpretation uniform $\frac{1}{h} = N \sim$ Aufwand

uniform $\varepsilon = \alpha N^{-\beta}$

adaptiv $\varepsilon = \alpha N^{-\gamma}$