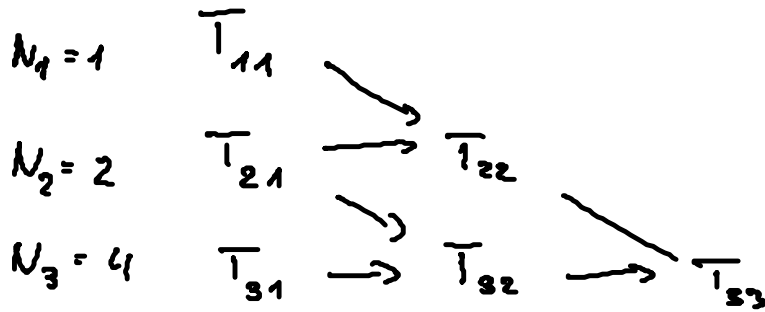


Extrapolation

mit der Romberg-Folge $N_i = 2^{i-1}$
1, 2, 4, 8, 16, ...

für die Trapezregel



läßt sich interpretieren als

$$\int_0^1 f(t) dt \approx \sum_{i=0}^{N_i} w_i f\left(\frac{i}{N_i}\right)$$

Vergleich mit Newton-Cotes

- Positivität der Gewichte
- Anzahl der Knoten für gegebene Ordnung
- Fehler für geg. Ordnung

Ordnung	Newton Cotes	Extrapolation
3	Trapez 2	Trapez T_{11} 2
5	Simpson 3	T_{22} 3
7	Newton 4	T_{33} 5
	— 6	
9	Weddle 7	T_{44} 9

p

p-2

~ 2^{p/2}

ab p=11

negative Gewichte

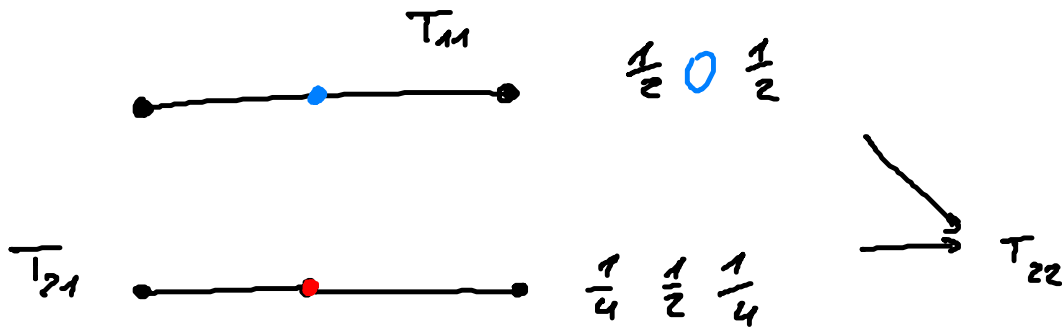
Bestimmung der Gewichte zur Extrapolation

$$T_{ik} = T_{i,k-1} + \frac{T_{i,k-1} - T_{i-1,k-1}}{\left(\frac{N_i}{N_{i-k+1}}\right)^2 - 1}$$

es gilt $T_{in} = \sum_{j=0}^{N_i} w_{i,j} f\left(\frac{j}{N_i}\right)$ mit $w_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{2N_i}, & j=0 \vee j=N_i \\ \frac{1}{N_i}, & \text{sonst} \end{cases}$

aus Extrapolation:

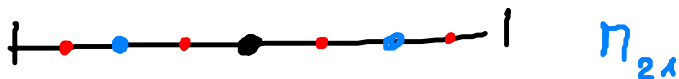
$$w_{i,k,j} = w_{i,k-1,j} + \frac{w_{i,k-1,j} - w_{i-1,k-1,j/2}}{\left(\frac{N_i}{N_{i-k+1}}\right)^2 - 1}$$



also $w_{i,k,j} = 0$ falls $j \notin N$

Beobachtung: alle Gewichte sind positiv

Extrapolation der Mittelpunktsregel



Gauß - Quadratur auf unbeschränkten Intervallen

Sei $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ die Dichte einer Häufigkeitsverteilung mit „gewisser Ähnlichkeit“ zur Normalverteilung $e^{-\pi x^2}$.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses im Intervall $[-1, 1]$?

$$P[-1, 1] = \frac{\int_{-1}^1 h(x) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} h(x) dx} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{ok, summierte NC,} \\ \text{Extrap. Gauß-Logedre} \end{array}$$

\leftarrow ? unbeschränktes Gebiet!

Variante I: $\int_{-\infty}^{\infty} h(x) dx \approx \int_{-a}^a h(x) dx$

Variante II: Ansatz $h(x) = e^{-\pi x^2} f(x)$ mit f „glatt“

Gauß-Quadratur für $w(x) = e^{-\pi x^2}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n w_i f(x_i)$$

Gauß-Hermite-Quadratur

$$\text{Skalarprodukt } (f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} f(x) g(x) dx$$

Orthogonalisierung der Monome

(i) $q_0 = 1$, Normierung

$$\|q_0\|^2 = (q_0, q_0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} 1^2 dx = 1$$

$$\rightarrow p_0 = 1$$

$$(ii) \quad q_1 = x - \underbrace{(x, p_0)}_{=0} p_0 = x$$

$$(iii) \quad q_2 = x^2 - (x^2, p_0) p_0 - \underbrace{(x^2, p_1)}_{=0} p_1 \\ = x^2 - \frac{1}{2\pi}$$

$$\|q_2\|^2 = \frac{1}{2\pi^2} \longrightarrow p_2 = \sqrt{2\pi} \left(x^2 - \frac{1}{2\pi} \right)$$

Stützstellen: Nullstellen von p_2

$$\pm \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx \pm 0.3989\dots$$

Gewichte: $1/2$

nachrechnen: Lagrange-Polynom

$$L_1(x) = \frac{x - \left(\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \left(\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\right)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} L_1(x) dx = \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2\pi} x + 1}{2}$$

Beispiel: $f(x) = 1 + \cos 2\pi x$

$$f(0.3989) \approx 0.1949$$

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} f(x) dx \approx 0.1949$$

$$\text{exakter Wert: } 1 + e^{-\pi} \approx 1.04321$$

Höhere Ordnung: q_3 ist ungerade, spielt keine Rolle

$$q_4 = x^4 - (x^4, p_0) p_0 - (x^4, p_2) p_2$$

$$= x^4 - \frac{3}{4\pi^2} p_0 - \frac{3}{\sqrt{2}\pi^2} \sqrt{2\pi} \left(x^2 - \frac{1}{2\pi} \right)$$

$$= x^4 - \frac{3}{\pi} x^2 + \frac{3}{4\pi^2}$$

Quadratische Gleichung in x^2

$$x^2 = \frac{\frac{3}{\pi} \pm \sqrt{\frac{9}{\pi^2} - 4 \frac{3}{4\pi^2}}}{2}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{6}}{2\pi}$$

Stützstellen $\pm \frac{3 \pm \sqrt{6}}{2\pi} \approx \pm 0.296$
 $\approx \pm 0.931$

$$L_1(x) = \frac{\left(x - \sqrt{\frac{3+\sqrt{6}}{2\pi}}\right) \left(x - \sqrt{\frac{3-\sqrt{6}}{2\pi}}\right) \left(x + \sqrt{\frac{3+\sqrt{6}}{2\pi}}\right)}{\left(y\right) \left(y\right) \left(y\right)}$$

$$y = -\sqrt{\frac{3-\sqrt{6}}{2\pi}}$$

$$\rightarrow W_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} L_1(x) dx = -\frac{5\sqrt{6} - 12}{2(\sqrt{3-3+\sqrt{6}})(-\sqrt{3-3+\sqrt{6}})} \approx 0.045876$$

$$W_2 = \frac{1}{2} - W_1 \approx 0.454124$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} f(x) \approx 0.82446$$

mit 6 Stützstellen: 1.0221

8

: 1.0422

Etwas weniger ausspruchsvoll:

$$f(x) = 1 + \cos(\pi x)$$

exakt: 1.455938...

4 Stützstellen: 1.4534

6 : 1.45592

8

: 1.455 9 38 ...

Zum Vergleich: Variante 1 mit Gauß-Legendre
4 Stützstellen auf $[-a, a]$

$$\text{Stützstellen } y = \pm \sqrt{\frac{3}{7} \pm \frac{2}{7} \sqrt{\frac{6}{5}}}$$

$$\text{Gewichte } w = \frac{18 \mp \sqrt{30}}{36}$$